Einführung in die Quantenoptik II

Sommersemester 2020
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 1 Ausgabe: 23. April 2020
Abgabe: 06. Mai 2020

Aufgabe 1.1 – Wigner-Funktion (9 Punkte)

Die Wigner-Funktion oder -Darstellung einer Wellenfunktion $\psi(x)$ wird wie folgt definiert

$$W(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}y}{2\pi\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py/\hbar}\psi(x+y/2)\psi^*(x-y/2) \tag{1.1}$$

Wir zeigen in der Vorlesung, dass $W(x,p)$ eine reelle Funktion ist.

(1) Zeigen Sie, dass die "natürliche Verallgemeinerung" auf einen gemischten Zustand wie folgt konstruiert werden kann

$$W(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}y}{2\pi\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py/\hbar}\rho(x+y/2, x-y/2) \tag{1.2}$$

wobei $\rho(x,x') = \langle x|\hat{\rho}|x'\rangle$ der Dichteoperator in der Ortsdarstellung ist. Aus der Normierung der Wellenfunktion (des Dichteoperators) folgern Sie die Normierungsbedingung

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\,W(x,p) = 1 \tag{1.3}$$

(2) Ein Gauß'sches Wellenpaket, $\psi(x) = N\exp(-x^2/4\sigma^2 + \mathrm{i}kx)$, hat als Wigner-Funktion eine doppelte Gauß-Funktion in Ort und Impuls

$$W(x,p) = N'\exp(-x^2/2\sigma^2 - a(p-\hbar k)^2) \tag{1.4}$$

Bestimmen Sie die Konstanten N' und a. Gibt es eine günstigere Wahl als $x^2/4\sigma^2$ im Exponenten des Gauß'schen Wellenpakets? Beobachten Sie, dass dies ein Zustand mit minimaler Unschärfe ist. Definieren Sie und berechnen Sie das Produkt $\Delta x\Delta p$ der Breiten seiner Wigner-Funktion.

10-Mark-Schein:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} = 1 \tag{1.5}$$

(3) Zeigen Sie: Eine in x ungerade Wellenfunktion (so etwas tritt bei stationären Zuständen in symmetrischen Potentialen auf) hat eine Wigner-Funktion, die bei $x = 0 = p$ strikt negativ ist.

(4) Berechnen Sie die Wigner-Funktion für eine Superposition aus zwei Wellenpaketen,

$$\psi_{12}(x) = N\,\exp(-(x - x_1)^2/4\sigma^2) + N\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\exp(-(x - x_2)^2/4\sigma^2) \tag{1.6}$$

und untersuchen Sie ihr Verhalten für $x \approx x_1, x_2$ sowie $x \approx \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. (Plot?)

(5) Zeigen Sie: Das Integral der Wigner-Funktion über alle Impulse p liefert die Ortsverteilung ("Projektionssatz")

$$|\psi(x)|^2 = \int \mathrm{d}p\, W(x, p) \tag{1.7}$$

Warum ist dies nicht wirklich der "Schattenwurf" der Wigner-Funktion?

(6) Die Impulsverteilung des Zustands ergibt sich mit einem ähnlichen Projektionssatz

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = N_p \int \mathrm{d}x\, W(x, p) \tag{1.8}$$

wobei $\tilde{\psi}(p)$ die Fourier-Transformierte von $\psi(x)$ ist. Der Faktor N_p hängt von der Konvention für die Fourier-Transformation ab. Finden Sie die Konvention, die auf $N_p = 1$ (wie in Gl.(1.7)) führt. Machen Sie sich an Hand der Superposition aus Gl.(1.6) klar, was diese Formeln für die Form der Orts- und Impuls-Verteilung bedeuten. Geben Sie eine anschauliche Interpretation an.

(7) Zeigen Sie, dass der Überlapp zwischen zwei Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 durch ein Überlapp-Integral zwischen ihren Wigner-Funktionen W_1 and W_2 ausgedrückt werden kann

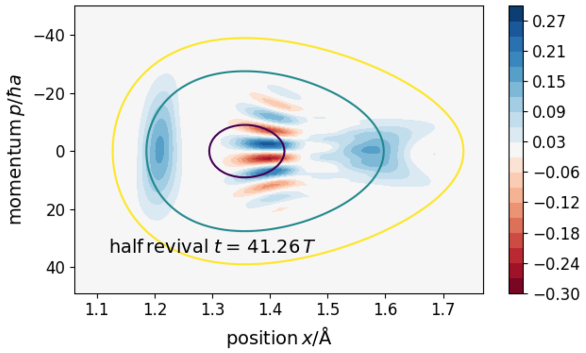
$$|\langle\psi_2|\psi_1\rangle|^2 = N_o \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\, W_1(x, p)\, W_2(x, p) \tag{1.9}$$

wobei Sie die Konstante N_o berechnen. Machen Sie sich klar, wie diese Gleichung in geeigneten Grenzfällen die Projektionssätze liefert. Nehmen Sie für ψ_1 ein Gauß'sches Wellenpaket und überlegen Sie, was Gl.(1.9) für die Größe der Bereiche bedeutet, in denen eine Wigner-Funktion negative Werte annimmt.

(8) Betrachten Sie die Verallgemeinerung von Gl.(1.9), wobei ψ_1 durch einen gemischten Zustand (Dichteoperator ρ, Wigner-Funktion W) ersetzt wird. Folgern Sie, dass gilt

$$0 \le N_o \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\, W(x, p)^2 \le 1 \tag{1.10}$$

wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn ρ ein reiner Zustand ist. Vergleichen Sie qualitativ die Zahlenwerte dieses Integrals sowie der Normierung (1.3), wenn die Wigner-Funktion die in der Abbildung angegebene Form hat.



Was geschieht mit den Zahlenwerten dieser Integrale, wenn die Wigner-Funktion durch einen bestimmten Prozess im rot-blau gestreiften Gebiet auf Null abfällt? (So einen Prozess nennt man “Dekohärenz”.)

(9) Um die Verbindung zur Quantenoptik herzustellen, betrachten wir den Mittelwert $\langle \hat{D}(k,s)\rangle = \langle\psi|\hat{D}(k,s)|\psi\rangle = \mathrm{tr}[\rho\, \hat{D}(k,s)]$ eines Verschiebe-Operators

$$\hat{D}(k,s) = \exp[-\mathrm{i}(k\hat{x} - \hat{p}s/\hbar)] \tag{1.11}$$

und seine Fourier-Transformation

$$f(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}k\mathrm{d}s}{2\pi} \langle \hat{D}(k,s)\rangle \exp \mathrm{i}(kx - ps/\hbar) \tag{1.12}$$

Hier sind $\hat{x}$, $\hat{p}$ die Operatoren für Position und Impuls. Zeigen Sie, dass f (bis einen Faktor) mit der Wigner-Funktion W übereinstimmt.

(a) Für den Beweis ist die Baker–Campbell–Hausdorff-Formel nützlich (die eigentlich Glauber-Formel heißen müsste): Sind A und B Operatoren, die mit ihrem Kommutator $[A,B]$ vertauschen, dann gilt

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \tag{1.13}$$

Sie können z.B. B aus dem Impuls-Operator $\hat{p}$ konstruieren und benutzen, dass das Exponential $\exp(-\mathrm{i}\hat{p}a/\hbar)$ die Verschiebung einer Wellenfunktion im Ortsraum erzeugt.

(b) In der Quantenoptik definiert man den Verschiebe-Operator in der Form $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ wobei $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die dimensionslosen Vernichter- und Erzeuger-Operatoren sind. Zeigen Sie, dass eine geeignete Wahl der komplexen Zahl α auf einen Spezialfall von $\hat{D}(k,s)$ aus Gl.(1.11) führt. Verwenden Sie die “natürlichen Einheiten” für einen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω.

(10*) Offene Fragen: wie kann man die (von Neumann) Entropie eines Zustands durch seine Wigner-Funktion ausdrücken?

Aufgabe 1.2 – Verschiebe-Operatoren (5 Punkte)

Unter anderem Roy Glauber verdanken wir die Konstruktion von Verschiebe-Operatoren $\hat{D}(\alpha)$, die von einem komplexen Parameter α abhängen. Sie sind definiert durch

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \tag{1.14}$$

(1) Zeigen Sie, dass $\hat{D}(\alpha)$ unitär ist und $[\hat{D}(\alpha)]^\dagger = \hat{D}(-\alpha)$ gilt.

(2) Benutzen Sie die Glauber-Formel (1.13), um den Verschiebe-Operator in die Form

$$\hat{D}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \exp(\alpha a^\dagger) \exp(-\alpha^* a) \tag{1.15}$$

zu bringen. Warum nennt man dies die normal geordnete Form des Operators?

(3) Wenden Sie (1.15) auf den Vakuum-Zustand $|0\rangle$ an und zeigen Sie, dass $\hat{D}(\alpha)|0\rangle$ der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ ist. Benutzen Sie eine andere Ordnung, um zu zeigen, dass in der Ortsdarstellung $|\alpha\rangle$ ein Gauß'sches Wellenpaket (s. Aufgabe **1.1**(2)) ist.

(4) Berechnen Sie das Produkt von zwei Verschiebe-Operatoren

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\alpha,\beta)} \hat{D}(\alpha + \beta) \tag{1.16}$$

und zeigen Sie, dass die (reelle) Phase $\phi(\alpha, \beta)$ sich unter Vertauschen von α, β antisymmetrisch verhält. [Um zu sehen, dass dies so sein muss, betrachten Sie das hermitesch Konjugierte von Gl.(1.16).]

(5) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gl.(1.16) den Erwartungswert $\langle \hat{D}(z) \rangle$ in einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$. (Vorsicht, hier sind mit z und α verschiedene komplexe Zahlen gemeint.) Dieser hängt gemäß Gl.(1.12) mit der Wigner-Funktion des kohärenten Zustands zusammen.

Aufgabe 1.3 – Wigner-Funktion in der Quantenoptik (4 Punkte)

In der Quantenoptik definiert man die Phasenraum-Verteilung $W(\alpha) = W(q, p)$, genannt Wigner-Funktion, durch die Konstruktion ($\alpha = q + \mathrm{i}p$)

$$\chi_W(z) = \langle \Psi | D(z) | \Psi \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \exp(z a^\dagger - z^* a) |\Psi\rangle\langle\Psi| \right\} \tag{1.17}$$

$$W(\alpha) = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2} \exp(z^* \alpha - z \alpha^*) \chi_W(z) \tag{1.18}$$

(1) Drücken Sie $z^*\alpha - z\alpha^*$ durch Real- und Imaginär-Teil aus und begründen Sie, dass Gl.(1.18) eine Fourier-Transformation ist. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ für die Rücktransformation

$$\chi_W(z) = \mathcal{N} \int \mathrm{d}^2\alpha \exp(z\alpha^* - z^*\alpha) W(\alpha) \tag{1.19}$$

(2) Zeigen Sie, dass die Wigner-Funktion des kohärenten Zustands eine Gauss-Funktion

$$|\Psi\rangle = |\beta\rangle \mapsto W(\alpha) \sim \exp(-2|\alpha - \beta|^2) \tag{1.20}$$

ist. (Keine Garantie für den Faktor 2 im Exponenten.)

(3) Die P-Funktion eines Zustands (auch Glauber–Sudarshan-P-Darstellung genannt) ist durch die Entwicklung seines Dichteoperators ρ definiert

$$\rho = \int \mathrm{d}^2\alpha \, |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha) \tag{1.21}$$

Folgern Sie, dass die Wigner-Funktion durch eine Gauß'sche Faltung aus der P-Funktion entsteht

$$W(\alpha) \sim \int \mathrm{d}^2\beta \, \exp(-2|\alpha - \beta|^2) \, P(\beta) \tag{1.22}$$

Übersetzen Sie diese Formel in den Fourier-Raum.

(4) Zeigen Sie, dass die Anwendung eines Verschiebe-Operators $\hat{D}(\beta)$ auf den Zustand $|\Psi\rangle$ die Wigner-Funktion "starr verschiebt". Damit ist gemeint

$$|\Psi\rangle \mapsto \hat{D}(\beta)|\Psi\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad W(\alpha) \mapsto W(\alpha - \beta) \tag{1.23}$$

Aufgabe 1.4 – Journal templates in physics (2 Punkte)

Scientific journals propose to their authors "templates" for writing papers. Check out the journals listed below and find their templates on the web.

Each student takes a different template and completes it with the following information: Title, author, affiliation, abstract and a bibliography list with three items. If you need inspiration, just produce a fake copy of the paper by Dirac (1927) on the quantum theory of emission and absorption of radiation (photons). Print out the result and hand it in with the rest of your problem solutions. For one of the problems in this semester, you will be asked to hand in a solution in a similar electronic form (this time under your name).

Nature Photonics, Europhysics Letters, Physics Letters A, Optics Letters, Physical Review A, Journal of Physics B, European Physical Journal D, Journal of Optics, Journal of modern Optics, Optics Communications, Journal of the Optical Society of America B, Annalen der Physik (Berlin), Annals of Physics (N.Y.)

[Bonus points if your bibliography is "correctly" formatted.]