Theoretische Physik II
- Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie -

Übungsblatt 7 (20 Punkte)

Ausgabe 30.11.10 – Abgabe 07.12.10 – Besprechung n.V.

▷ Aufgabe 1 (Kapazitäten) (4 Punkte)

Gegeben eine Konfiguration dreier konzentrisch angeordneter, leitender Kugelschalen, $R_1 < R_2 < R_3$. Die äußere Kugelschale sei geerdet. Ihr Radius wird am Ende $R_3 \to \infty$; kurz – sie repräsentiert "den Rand der Welt".

(a) Berechnen Sie die Kapazitätskoeffizienten.

(b) Was ergibt sich im Grenzfall $R_3 \to \infty$ für "1&2 ladungsneutral", $Q_1 = -Q_2 \equiv Q$? Unter welchem Namen fungiert die resultierende Anordnung im Labor bzw. Elektronikbaukasten?

(c) Wie müssen Sie die Radien wählen, damit so etwas wie ein Plattenkondensator entsteht?

<u>Hinweise:</u> Vergewissern Sie sich zunächst, dass wenn Schale 1 die Ladung Q_1 trägt, und Schale 2 die Ladung Q_2, dann trgt Schale 3 die Ladung $-(Q_1 + Q_2)$. Vergewissern Sie sich fürderhin dass das elektrische Feld radial, bestimmen es via Gauss'scher Satz, daraus Spannungen U_1 und U_2 auf denen die Schalen 1 und 2 liegen (die Schale 3 liegt auf Spannung $U_3 = 0$), und schließlich

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{(R_3-R_1)R_2}{(R_3-R_2)R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Den Rest machen Sie selbst ...

▷ Aufgabe 2 (Green'sche Funktion der Kugel) (8 Punkte)

Gegeben die Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} - \frac{a}{x' \|\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}'\|} \tag{2}$$

worin $a > 0$ eine Konstante, und $x' = \|\vec{x}'\|$.

Zeigen Sie

(a) Die Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$ ist die Dirichlet Green'sche Funktion der Kugel K mit Radius a,

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\,, \qquad G(\vec{x}, \vec{x}')|_{\vec{x}\in\partial K} = G(\vec{x}, \vec{x}')|_{\vec{x}'\in\partial K} = 0 \tag{3}$$

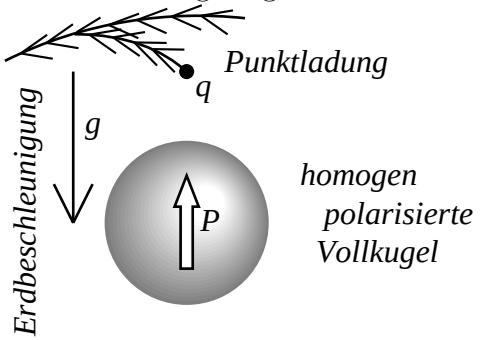
(b) Das Potential einer Punkladung e am Ort $\vec{r}$ ausserhalb einer isolierten, leitenden und geladenen Kugel K liest sich

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{x}) = \frac{e}{\|\vec{x}-\vec{r}\|} - \frac{ea}{r\|\vec{x}-\frac{a^2}{r^2}\vec{r}\|} + \frac{Q+\frac{a}{r}e}{\|\vec{x}\|} \tag{4}$$

worin $r = \|\vec{r}\|$ und Q die Ladung auf der Kugel.

▷ **Aufgabe 3 (Homogen polarisierte Kugel)** (8 Punkte)

Eine befreundete High-Tech Firma beabsichtigt, elektrisch polarisierte Vollkugeln mit elektrostatischer Aufhängung als Christbaumschmuck herzustellen – vgl. Skizze. Als weithin anerkannte Kapazität der theoretischen Physik werden Sie gefragt "ob das Ganze überhaupt



funktioniert".

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ im Innenraum und Aussenraum der Kugel.

(b) Berechnen Sie nun die elektrostatische Wechselwirkungsenergie zwischen der Kugel und der Punktladung q.

(c) Analysieren Sie abschließend die Gesamtenergie der Anordung die sich aus elektrostatischer Wechselwirkungsenergie und potentieller Energie im (homogenen) Schwerefeld zusammensetzt. Gibt es eine stabile Gleichgewichtslage der Christbaumkugel, d. h. sollte die befreundete Firma in die Produktion einsteigen?

Hinweise: Achtung! Das Polarisationsfeld ist hier nicht induziert, sondern "fest". Berechnen Sie zunächst in (a) die Oberflächenladungsdichte der Kugel ($= -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x})$), und stellen Sie dabei fest, dass Sie die Kugel als zwei infinitesimal benachbarte homogen geladene Kugeln ansehen können. Für (b) rufen Sie sich in Erinnerung, dass die Stärke der Polarisation vorgegeben ist, d. h. die Wechselwirkungsenergie darf mit der Energie der Punktladung q im elektrischen Feld der Kugel identifiziert werden. In (c) beachten Sie, dass diese Energie insbesondere von der *Richtung* der Polarisation bezüglich der Verbindungsgerade Kugelmittelpunkt-Punktladung abhängt.