Mathematische Methoden LA

- WS 2011/2012 -

Übungsblatt 10 (20 Punkte)

Ausgabe 19.12.2011 – Abgabe 02.01.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 *

Nehmen Sie Ihr Lieblings-Mathebuch zur Hand, Stichwort "Determinante" und überzeugen sich von folgender Identität (A, B, S etc sind $n \times n$-Matrizen)

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{1}$$

und schließen Sie $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, sowie $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$. Seien Sie gewiss, dass Sie in der Klausur von Ihrem Wissen Gebrauch machen dürfen.

▷ Aufgabe 2 *

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

▷ Aufgabe 3

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \text{ für jedes positives } s \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ für jedes reelle } a > 0. \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{5}$$

▷ Aufgabe 4 *

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

<u>Hinweis:</u> Eine Partialbruchzerlegung des Summanden könnte sich als nützlich erweisen ...

▷ Aufgabe 5

Falls Sie sich jemals gefragt haben, wie man Wurzeln zieht (vulgo "$\sqrt{2}$ ausrechnet") – hier ist die Antwort: mit Hilfe der Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \tag{8}$$

worin a eine vorgegebene reelle Zahl größer Null (deren Wurzel man berechnen möchte).

(a) Berechnen Sie für den Fall $a = 2$ und Startwert $x_0 = 1$ die drei ersten Glieder der Folge (). Lassen Sie sich anschließend die Wurzel aus 2 von Ihrem Taschenrechner anzeigen und vergleichen Sie x_3 mit der Anzeige Ihres Taschenrechners.

(b) Zeigen Sie: Bei beliebig gewähltem Startwert $x_0 > 0$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ und die Folge () konvergiert ab $n = 1$ monoton fallend gegen $\sqrt{a}$.

(c) Zeigen Sie, dass der Fehler $f_n := x_n - \sqrt{a}$ abgeschätzt wird $|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$. Schließen Sie, dass für x_3 im obigen Beispiel $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-4} \cdot 10^{-4}$. Auf wieviele Stellen (hinter dem Komma) approximiert also x_3 die Zahl $\sqrt{2}$?

▷ Aufgabe 6 (Weihnachtsstern der Pythagoräer)

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon), tragen die Diagonalen ein, erhalten so ein Pentagramm, und überzeugen sich davon, dass hier gilt

$$\text{Diagonale} : \text{Seite} = \text{Seite} : (\text{Diagonale} - \text{Seite}) \tag{12}$$

<u>Hinweis:</u> Die Diagonalen bilden in der Mitte wiederum ein Pentagon – hilft das weiter?

Benennen Sie

$$g := \text{Diagonale} : \text{Seite} \tag{13}$$

und zeigen dass g nicht rational.

Die Zahl g nennt man den *goldenen Schnitt*. Betrachten Sie zum Startwert $x_0 = 1$ die Folge

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \tag{14}$$

und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ mit

$$g = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) . \tag{15}$$

Gehen Sie auf Wikipedia, und lesen dort unter dem Stichwort “Pythagoräer” und “Goldener Schnitt” nach, was es mit den beiden auf sich hat.