Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 1 Abgabe: 23. Oktober 2012

Hinweis. Die Übungsaufgaben sind als Angebot zum Auswählen gedacht. Je nach Geschmack kann man Gleichungen nachrechnen, Lösungen der SCHRÖDINGER–Gleichung finden, spezielle Funktionen untersuchen, einfache physikalische Situationen modellieren, etwas numerisch nachrechnen oder aber ein relativ offen formuliertes Problem kreativ angehen. Es kommt öfter vor, dass ich die Lösung nicht im Detail kenne.

Aufgabe 1.1 – Hydrodynamische Formulierung der SCHRÖDINGER–Gleichung (7 Punkte)

Machen Sie folgenden Ansatz für die Wellenfunktion in drei Dimensionen

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} \exp\left[\mathrm{i}S(\mathbf{r}, t)/\hbar\right]$$

und leiten Sie aus der zeitabhängigen SCHRÖDINGER–Gleichung Beziehungen für die reellen Größen ρ und S ab. Eine dieser Beziehungen liefert eine Kontinuitätsgleichung für die "Dichte" ρ und den Fluss

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t).$$

Führen Sie das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)}$$

ein und überzeugen Sie Sich, dass die andere Gleichung eine Flüssigkeit beschreibt, die sich unter unter der Wirkung des Potentials

$$V_{\mathrm{tot}}(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}} \nabla^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}$$

bewegt. Der zweite Term verschwindet im klassischen Grenzfall und wird "Quantenpotential" genannt.

Betrachten Sie ein freies Wellenpaket, das zum Zeitpunkt $t = 0$ eine gaussförmige Ortsverteilung besitzt, und berechnen Sie die "Quanten-Kraft". Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Teilchen der "Quantenflüssigkeit". Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Zerfließen des Wellenpakets, das Sie von der direkten Lösung der SCHRÖDINGER–Gleichung kennen.

Das Quantenpotential spielt eine wichtige Rolle in der DEBROGLIE–BOHM–Formulierung der Quantentheorie. Um den Welle–Teilchen–Dualismus zu überwinden, stellt man sich vor, dass die Wellenfunktion ein Strömungsfeld beschreibt, in dem ein Punktteilchen mitgenommen wird.

Aufgabe 1.2 – Fresnel-Integral (5 Punkte)

Leiten Sie das Fresnel-Integral her

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2/2} = \sqrt{2\pi\mathrm{i}} \tag{1.1}$$

indem Sie den Integrationsweg in der komplexen Ebene geeignet verändern.

Aufgabe 1.3 – Die AIRY–Funktionen (8 Punkte)

Die AIRY–Funktionen $\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$ sind Lösungen der stationären, eindimen-

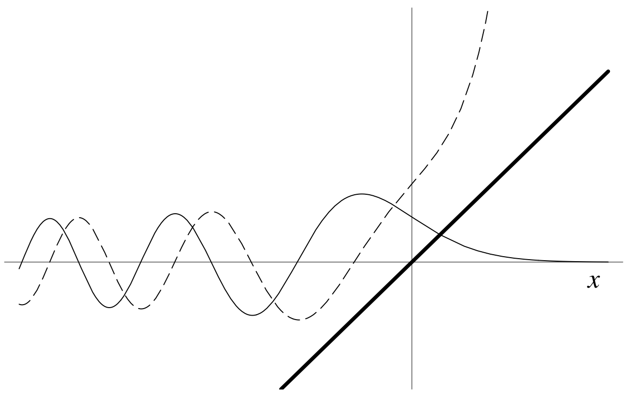

Figure 1.1: Die AIRY–Funktionen $\mathrm{Ai}(x)$ (durchgezogene Kurve), $\mathrm{Bi}(x)$ (gestrichelt). Die Gerade deutet das Potential an.

sionalen SCHRÖDINGER–Gleichung für ein konstantes Kraftfeld (ein lineares Potential, siehe Abb.1.1). Skalieren Sie die Größen Position und Energie geeignet und bringen Sie die SCHRÖDINGER–Gleichung in eine einfache Form. Finden Sie eine Integraldarstellung der AIRY–Funktionen, indem Sie die SCHRÖDINGER–Gleichung in der Impulsdarstellung lösen. Suchen Sie in Nachschlagewerken zu speziellen Funktionen das asymptotische Verhalten der AIRY–Funktionen für große Werte von $|x|$ und machen Sie einen graphischen Vergleich. (Grafik(en) bitte beschriften und die Datei elektronisch einreichen.)