Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 2 Abgabe: 06. November 2012

Aufgabe 2.1 – Radiale Schrödinger–Gleichung in d Dimensionen (5 Punkte)

Sie wissen vermutlich, dass in einem d-dimensionalen Raum die (nichtrelativistische) Schrödinger-Gleichung in einem radialsymmetrischen Potential $V(r)$ von folgender Form ist

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\psi + U(r)\psi = E\psi \tag{2.1}$$

wobei $U(r) = (\hbar^2/2m)L^2/r^2 + V(r)$ das effektive Potential und L^2 eine Drehimpuls-Quantenzahl ist. Machen Sie wie in der Vorlesung den Ansatz

$$\psi(r) = A(r)\exp\left[\mathrm{i}S(r)/\hbar\right] \tag{2.2}$$

und leiten Sie die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung für $A(r)$ ab. Wie lautet der Ausdruck für $S(r)$ in der WKB-Näherung?

Aufgabe 2.2 – WKB-Gültigkeit (7 Punkte)

(1) In der Vorlesung hatten wir für die Korrektur zur WKB-Wirkung folgenden Ausdruck gefunden (bitte kleine Fehler entschuldigen)

$$\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}x} = S_2'(x) = \frac{A_0''(x)}{2A_0(x)}\frac{1}{S_0'(x)} \tag{2.3}$$

Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck (geeignet korrigiert) äquivalent zu folgender Formulierung ist:

$$\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{p(x)}}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{p'(x)}{[p(x)]^{5/2}}\right) \tag{2.4}$$

wobei $p(x)$ der Impuls, ausgedrückt durch Energie und Potential, ist.

(2) Häufig wird für die WKB-Näherung die Bedingung angeführt "Die Wellenlänge ändert sich langsam". Zeigen Sie, dass dies auf die Ungleichung

$$\hbar\,|p'(x)| \ll [p(x)]^2 \tag{2.5}$$

führt und vergleichen Sie mit $\hbar^2|S_2'(x)| \ll |S_0'(x)|$, wobei S_2' durch Gl.(2.3, 2.4) gegeben ist.

Aufgabe 2.3 – Dimensionsanalyse (8 Punkte)

In der Physik von ultrakalten Gasen und in der Plasmaphysik taucht folgende nichtlineare Schrödingergleichung auf

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\phi + g|\phi(x)|^2\phi = \mu\phi \tag{2.6}$$

wobei $V(x)$ ein Potential und die Konstante g die Wechselwirkung zwischen Teilchen beschreibt. Der Energie-Eigenwert wird in diesem Zusammenhang gerne "chemisches Potential" μ genannt. Wiederholen Sie für den Fall eines linearen Potentials $V(x) = -Fx$ die Dimensions-Analyse aus der Vorlesung und finden Sie charakteristische Skalen für Länge w, Energie E_0 und die Dichte $|\phi(x)|^2$. Darf man ohne Einschränkung $\mu = 0$ einsetzen? (Ja!) Geben Sie Zahlenwerte für die Atome Rb-87 und Li-7 an, wenn F der Schwerkraft entspricht. Typische Zahlenwerte für g ergeben sich aus der Formel $g \approx 2\hbar\omega_\perp a$ wobei $\omega_\perp/2\pi \approx 10\ldots100\,\mathrm{kHz}$ und $a \approx 1\ldots10$ Bohr-Radien ist.

Finden Sie eine Näherungslösung zu Gl.(**??**), wenn $\hbar \to 0$ (was heißt das?) bei festen Werten für F und g. (Stichwort: Thomas-Fermi-Näherung)