Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 3 Abgabe: 20. November 2012

Aufgabe 3.1 – Eckharts Potentialtopf (7 Punkte)

Für den Eckhart-Potentialtopf $V(x)$ lauten die exakten Energie-Eigenwerte des diskreten Spektrums (Landau–Lifschitz, Band 3, Aufgabe § 23.5)

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \kappa x}, \quad E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{8m} \left(-2n - 1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\hbar^2 \kappa^2}} \right)^2$$

Dabei ist E_n negativ und $0 \leq n \leq n_{\max}$. Wie groß ist $n_{\max}$? Vergleichen Sie diese Energie-Eigenwerte mit der Vorhersage der WKB-Theorie. Für welche Quantenzahlen n und Potentialtiefen V_0 liefert WKB eine gute Näherung?

Aufgabe 3.2 – Gleichmäßig asymptotische Näherung (7 Punkte)

Gewinnen Sie eine gleichmäßig asymptotische Darstellung der Wellenfunktion für eine exponentielle Potentialbarriere $V(x) = V_0 \, \mathrm{e}^{-2\kappa x}$, indem Sie das Programm der Vorlesung anwenden und das Potential auf ein lineares Potential abbilden. Die exakte Lösung lautet

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi\kappa} \sinh \frac{\pi k}{\kappa}} \, K_{\mathrm{i}k/\kappa}[u(x)], \qquad u(x) = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \kappa^2} \right)^{1/2} \tag{3.1}$$

wobei $K_\alpha(z)$ eine modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art ist.

Aufgabe 3.3 – Gültigkeit der gleichmäßig asymptotischen Näherung (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Präzision der asymptotischen Näherung für die Bessel-Funktionen, die in der Vorlesung vorgestellt wurde.

1. Schätzen Sie den Term ab, der in der Differentialgleichung für die Koordinaten-Transformation $x \mapsto y(x)$ vernachlässigt wurde.

2. Vergleichen Sie die gleichmäßige Lösung mit dem asymptotischen Verhalten der Bessel-Funktionen am Ursprung und im Unendlichen. Untersuchen Sie, für welche Drehimpulsquantenzahlen n die führenden Terme übereinstimmen. Was kann man über die nächsthöheren Ordnungen sagen?