Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 4 Abgabe: 04. Dezember 2012

Aufgabe 4.1 – An exact spin-1/2 problem (7 Punkte)

The time-dependent Schrödinger equation for a spin-1/2 in an effective magnetic field can be solved exactly for the following model (notation of the lecture)

$$B_3(t) = E_0 = \text{const.}, \qquad B_1(t) = \frac{V_0}{\cosh(t/T)}, \qquad B_2 = 0 \tag{4.1}$$

(i) Make a sketch of the magnetic field and of the adiabatic potentials (eigenvalues of the potential matrix).

(ii) Show that the pair of 1st order equation can be mapped exactly to a 2nd order equation involving the Eckart potential $V(t) = a/\cosh^2(\lambda t)$. The solution to this problem can be found in the quantum mechanics textbook by Landau & Lifshitz (hypergeometric functions). Show that the transition probability between the states 1 and 2 is given by [5 bonus points]

$$w_{1\to 2} = \frac{\sin^2(\pi V_0 T/\hbar)}{\cosh^2(\pi E_0 T/\hbar)} \tag{4.2}$$

Make a sketch of this result as a function of T and V_0 and describe the qualitative behaviour.

Aufgabe 4.2 – Fresnel-Integral und stationäre Phase (7 Punkte)

(i) Sie haben in Blatt 01 das Fresnel-Integral kennengelernt. Die Konvergenz für große x ist allerdings ziemlich langsam. Analysieren Sie dazu das Integral

$$\int\limits_0^L \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax^2/2\hbar} = \sqrt{\frac{\mathrm{i}\pi\hbar}{2a}} + \frac{b}{L^\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}aL^2/2\hbar} + \mathcal{O}(L^{-\beta}) \tag{4.3}$$

für große Werte der oberen Grenze L. Bestimmen Sie die Zahlen b, α, β

(ii) Motivieren Sie, ausgehend von den Ergebnissen aus (i) die Näherung der 'stationären Phase'

$$\hbar \to \infty: \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x)/\hbar} \approx \sqrt{2\pi\mathrm{i}\hbar} \sum_s \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x_s)/\hbar}}{\sqrt{S''(x_s)}} \tag{4.4}$$

wobei die Funktion $S(x)$ an den Punkten x_s 'stationär' wird: $S'(x_s) = 0$.

(iii) Benutzen Sie Gl.(4.4), um die asymptotische Form der Airy-Funktion im oszillierenden Gebiet ($x \to -\infty$) abzuleiten:

$$\mathrm{Ai}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\pi} \cos(\tfrac{1}{3}t^3 + xt) \approx \frac{\sin(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \tag{4.5}$$

Aufgabe 4.3 – Asymptotische Entwicklung des Stieltjes-Integrals (6 Punkte)

Stieltjes hat nicht nur einen eigenen Integralbegriff erfunden, sondern auch folgendes Integral studiert

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\omega\, \mathrm{e}^{-x}}{\omega + x} \tag{4.6}$$

Entwickeln Sie den Bruch $\omega/(\omega + x)$ in eine Potenzreihe in x und integrieren Sie termweise. Das Ergebnis ist

$$I(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\omega^n} \tag{4.7}$$

Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius dieser Reihendarstellung gleich Null ist. Reproduzieren Sie die Abbildung aus dem Skriptum, wo $I(\omega)$ mit den ersten paar Termen aus der Reihe (4.7) verglichen wird.