Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 5 Abgabe: 18. Dezember 2012

Aufgabe 5.1 – Bis unendlich zählen (10 Punkte)

Wie lange dauert es, bis zu einer Zahl N laut zu zählen? Nehmen Sie an, dass Sie pro Ziffer eine Zeit τ brauchen. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der "Zählzeit" $t(N)$ für $N \to \infty$. Ist $\tau = 1\,\mathrm{s}$, bis zu welcher Zahl können Sie bis zum Ende Ihres Lebens zählen? Und wo wären Sie, wenn Sie schon als erster Mensch (oder: im Anfang des Universums) angefangen hätten zu zählen? Schaffen Sie es, alle Teilchen im Universum (zwischen 10^{78} und 10^{80}) zu zählen?

Variante: wenn die Ziffern als "Zehn", "Hundert", "Tausend", "Million" usw unterschieden werden müssen, brauchen Sie für Ziffern von hohe Stellenwerten länger. Im einfachsten Fall skaliert dann τ mit $\log n$ (warum?). Wie ändert sich dann Ihre asymptotische Abschätzung? Und wie ändert sich die Lösung, wenn Sie nicht im Dezimal-System zählen?

Aufgabe 5.2 – Zur Euler-Konstante (10 Punkte)

(Aufg. 6.5 aus Bender & Orszag) Die Euler-Konstante γ ist definiert als der Grenzwert ($\log$ ist der natürliche Logarithmus)

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left\{ -\log N + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right\} \approx 0.5772\ldots \tag{5.1}$$

Zeigen Sie, dass man γ auch über die Asymptotik der folgenden Integrale finden kann

$$\gamma = -\lim_{x\searrow 0} \left\{ \log x + \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \mathrm{e}^{-t} \right\} \tag{5.2}$$

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \left\{ \frac{1}{1+t} - \mathrm{e}^{-t} \right\} \tag{5.3}$$