Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 6 Abgabe: spätestens Februar 2012

Hinweis. Vorschläge für Vorträge in den Übungen, als Leistungsnachweis.
Die Probleme sind aktuellen Diplomarbeiten entnommen, die
entsprechenden Diplomanden sind als Ansprechpartner genannt.

Aufgabe 6.1 – Zweite Painlevé-Transzendente (10 Punkte)

(Ansprechpartner: Abdoulaye Diallo) In der Arbeit *Phys Rev A* **61** (2000) 055601 stellt Dionisios Margetis eine asymptotische Entwicklung der Lösung einer nichtlinearen Schrödingergleichung vor:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2} - z\phi + \phi^3 = 0, \\
z \to +\infty: \qquad & \phi(z) \sim \sqrt{z}\left\{1 - \frac{1}{8z^3} - \frac{73}{128z^6} - \frac{10657}{1024z^9} + \ldots\right\}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

wobei die Lösung durch die sogenannte Thomas-Fermi-Asymptotik (erster Term) eindeutig bestimmt wird. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe. Erstellen Sie ein paar aussagekräftige Abbildungen. Finden Sie heraus, wie D. Margetis aus dieser Reihe die Amplitude C für die Airy-Asymptotik auf der anderen Seite gefunden hat (Sie dürfen ihn gerne kontaktieren: www2.math.umd.edu/~diom/)

$$
z \to -\infty: \quad \phi(z) \sim C\,\mathrm{Ai}(-z), \quad C \approx 1.414\,213\,649\,795 \approx \sqrt{2}. \tag{6.2}
$$

Aufgabe 6.2 – Variante zur Mathieu-Gleichung (10 Punkte)

(Ansprechpartner: Ralf Saplata) Im Abschnitt 11.4 bei Bender & Orszag werden die Lösungen der Mathieu-Gleichung

$$
-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 2\varepsilon\cos(t)y = ay \tag{6.3}
$$

diskutiert. In der Festkörperphysik liefert die Mathieu-Gleichung näherungsweise die elektronische Bandstruktur eines Kristalls (warum?). Bandlücken (oder "instabile Energiebereiche") entsprechen mathematischen Lösungen, die für große Argumente $t \to \pm\infty$ anwachsen. Diese Bereiche werden bei Bender & Orszag unter Verwendung von Mehr-Skalen-Methoden relativ genau bestimmt.

Wenden Sie dieses Programm auf folgendes System von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten an:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_e}{\mathrm{d}t} &= ac_e + \varepsilon\cos(t)c_g \\ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}c_g}{\mathrm{d}t} &= -ac_g + \varepsilon\cos(t)c_e \end{aligned} \qquad (6.4)$$

das Sie vielleicht aus der Atom-Licht-Wechselwirkung wiedererkennen. Von Interesse ist der Grenzfall $|\varepsilon| \ll |a|$, die Resonanzbedingung $a \sim 1/2$ lässt instabiles Verhalten erwarten. Können Sie zeigen, dass die Lösung trotzdem beschränkt bleiben muss? Untersuchen Sie das Verhalten der Eigenvektoren der Floquet-Matrix F, deren Spalten die Lösungen $(c_e(2\pi), c_g(2\pi))^T$ für Anfangsbedingungen $c_e(0) = 1$ und $c_g(0) = 1$ bilden.