

Asymptotische Methoden in der Theoretischen Physik

Wintersemester 2012/13

Carsten Henkel

Übungsblatt 7

Abgabe: 05. Februar 2013

Aufgabe 7.1 – Beugung an “elliptischem Bauchnabel” (*elliptic umbilic diffraction pattern*) (5 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir eine spitzenförmige Kaustik (*cusp*) betrachtet. Die nächst-komplexere Version ist der “elliptische Bauchnabel”, gegeben durch folgendes Beugungsintegral

$$\psi(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int ds dt \frac{\exp ikL(x, y, z)}{L(x, y, z)}, \quad L(x, y, z) = R - g(s, t) - z(s^2 + t^2) - xs - yt \quad (7.1)$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl, R ein (großer) Abstand zwischen Quelle und Beobachter ist und x, y, z die Koordinaten des Beobachtungspunkts. Die einfallende Wellenfront ist durch $g(s, t) = \beta(s^3 - 3st^2)$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie die physikalischen Dimensionen von P , s , t , und β . Skalieren Sie die Koordinaten x, y, z auf natürliche dimensionlose Größen durch eine geeignete Substitution im Integral. Wie skaliert die Amplitude P des Wellenfelds mit k ? Wie skaliert das Interferenzmuster in der xy -Ebene und wie mit dem Abstand z ?

(ii) Die asymptotische Näherung für kleine Wellenlängen führt auf das elliptisch-umbilische Beugungsintegral

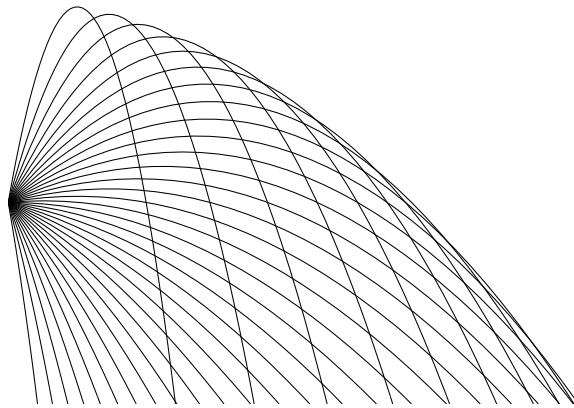
$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int ds dt \exp i[s^3 - 3st^2 - z(s^2 + t^2) - xs - yt] \quad (7.2)$$

Zeigen Sie, dass das Interferenzmuster für festes z die Symmetrie eines gleichseitigen Dreiecks in der xy -Ebene hat.

Aufgabe 7.2 – Interferometrie mit Neutronen (15 Punkte)

Sie kennen aus der klassischen Mechanik das Problem der Wurfparabel. Derartige Bahnen treten auch für ultrakalte Neutronen im Schwerfeld auf und wurden bereits als Beitrag zur “Quanten-Gravitation” angepriesen Berechnen Sie die Phase der Propagatoren $K(A, B)$ und $G(A, B; E)$ aus der Vorlesung für eine Parabel mit Höhe

H und horizontalem Abstand L zwischen Wurf- und Auftreffpunkt A und B , indem Sie das klassische Wirkungsintegral auswerten. Können Sie zwei Bahnen mit verschiedenen Wurf-Winkeln finden, die die Punkte A und B gemeinsam haben? Berechnen Sie den Unterschied in der Energie bei fester Laufzeit ($K(A, B)$) und den Unterschied in der Laufzeit bei fester Energie ($G(A, B; E)$), sowie die entsprechenden Phasenunterschiede. Ist es möglich, dass solche Parabeln ein Strahlenbündel am Auftreffpunkt fokussieren (über geeignete Anfangsbedingungen nachdenken)?



Das Bild wurde für eine monochromatische Punktquelle und verschiedene Anstellwinkel gerechnet. Sie erkennen eine Kaustik. Können Sie für diese eine Gleichung finden?

Typische Zahlenwerte für “ultrakalte Neutronen” (bitte recherchieren) liegen bei Energie im Bereich 1 K, räumliche Dimensionen bei 1 . . . 10 cm. Die Experimente werden auf der Erde durchgeführt.