Kapitel 3

Elemente der reellen Arithmetik

Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen. Vergessen, was Zahlen sind und was man mit denen alles so machen kann? Macht nichts. Die folgenden Abschnitte sind als kleine Erinnerungshilfe gedacht.

Ach übrigens – verwechseln Sie bitte nicht Zahl mit Ziffer. Eine Zahl ist ein mathematischen Ding, dessen Eigenschaften in einem Axiomensystem oder ähnlichem festgelegt werden. Eine Symbolsequenz wie 123 ist zunächst lediglich eine *Ziffer* (arabisch: sifr). Im *Dezimalsystem*, auch genannt das *dekadische* System, steht diese Ziffer für den einhundertdreiundzwanzigsten Nachfolger des Neutralelements der Addition, das üblicherweise mit 0 bezeichnet wird. Im *dyadischen System*, auch genannt *duales System*, wäre diese Zahl durch die Ziffer 1111011 dargestellt, worin 0 wie gehabt die Ziffer für das Neutralelement der Addition, und 1 die Ziffer für den Nachfolger von 0. Man kann also Zahlen ganz unterschiedlich darstellen. Sofern nicht ausdrücklich vermerkt, werden Zahlen in dieser Vorlesung im Dezimalsystem dargestellt wobei wir für die sog. *Grundperiode* unseres Systems die arabischen Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ verwenden, wobei 1 der Nachfolger von 0, 2 der Nachfolger von 1, ..., 9 der Nachfolger von 8. Der Nachfolger von 9 – die Zahl $9 + 1$ – wird mit der Ziffer 10 bezeichnet, der Nachfolger von 99 mit der Ziffer 100 und so weiter. Alles klar? Na dann mal los ...

3.1 Die vier Grundrechenarten

Hat man drei Kartoffeln, und legt zwei dazu, schaut man auf fünf Kartoffeln, $3+2 = 5$. Nimmt man vier Kartoffeln wieder weg, behält man eine übrig, $5 - 4 = 1$. Und hat man zwei Haufen, jeder mit drei Kartoffeln, kann man die zu einem einzigen Haufen, bestehend aus sechs Kartoffeln zusammenfassen, $2 \cdot 3 = 6$. Den Haufen kann man anschließend wieder in drei Haufen gleicher Größe aufteilen, $6 \div 3 = 2$.

Die jeweilige Anzahl von Kartoffeln (oder Äpfel, oder Sterne) bestimmt man durch Abzählen in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dazulegen nennt man mathematisch addieren, wegnehmen nennt man subtrahieren, zusammenfassen nennt man multiplizieren und aufteilen nennt man dividieren. Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sind die *vier Grundrechenarten der Arithmetik*.

Im Umgang mit den natürlichen Zahlen stellt man nun fest:

- Beim Addieren bzw. Multiplizieren von drei Zahlen $2, 3, 4$ kann man zuerst 2 und 3 addieren bzw. multiplizieren, und addiert dann die 4 bzw. multipliziert mit 4, oder man addiert bzw. multipliziert erst mal 3 und 4, und addiert dann 2 bzw. multipliziert mit 2, $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ bzw. $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$. Man sagt Addition und Multiplikation genügen dem *Assoziativgesetz*.

- Außerdem kommt es beim Addieren bzw. Multiplizieren nicht auf die Reihenfolge an, $3+2 = 2+3$ bzw. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Man sagt, Addition und Multiplikation genügen dem *Kommutativgesetz.*

- Hat man schließlich eine Summe, wie etwa $3 + 4$, und will die mit 2 multiplizieren, kann man auch erst die Produkte $2 \cdot 3$ und $2 \cdot 4$ berechnen, und diese anschließend addieren, $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$. Man sagt, Addtion und Multiplikation genügen dem *Distributivgesetz.*

Es ist aussichtslos, eine Regel wie das Kommutativgesetz der Addition für jedes Paar natürlicher Zahlen aufzuschreiben, also etwa $1+2 = 2+1$, $1+3 = 3+1$, $2+3 = 3+2$ usw. Statt dessen greift man zur *Buchstabenrechenung*, bei der Buchstaben m, n für irgendwelche Zahlen stehen. Das Kommutativgesetz der Addition liest sich dann: "Für jedes Paar von Zahlen m, n gilt $m + n = n + m$". Buchstabenrechung ist der Schlüssel zur Mathematik. Gewöhnen Sie sich daran.

Subtraktion ist in den natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt möglich: Wenn man aus einem Korb mit fünf Kartoffeln alle fünfe rausnimmt, ist der Korb leer, und die Kartoffeln in einem leeren Korb lassen sich nicht abzählen (für die ganz Klugen: 0 ist keine Abzählzahl). Und wenn man aus einem Korb mit fünf Kartoffeln sechse herausnehmen will, geht das ohne Kartoffelschulden zu machen schon gleich gar nicht. Kartoffelschulden nennt man in der Arithmetik negative Zahlen, so dass beispielsweise $5 - 6 = -1$, einen leeren Korb nennt man 0, so dass beispielsweise $5 - 5 = 0$, und die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, erweitert um die Null und die negativen Zahlen nennt man die *ganzen Zahlen*, bezeichnet $\mathbb{Z}$. In den ganzen Zahlen kann man genauso rechnen wie in den natürlichen Zahlen, nur dass jetzt die Subtraktion uneingeschränkt möglich ist. Genauer: Zu jeder Zahl p gibt es eine Zahl q mit $p + q = 0$. Die so bestimmte Zahl ist eindeutig, notiert $q := -p$, und es gilt $-p = -1 \cdot p$, wo -1 das *additiv Inverse* der Zahl 1, also $1 + (-1) = 0$, und 0 das *Neutralelement* der Addition $a + 0 = 0$. Das Neutralelement der Multiplikation ist die 1, denn $1 \cdot p = p$ für alle ganzen Zahlen p.

Feiert man Geburtstag, kann die Torte durchaus in sieben Stücke geteilt werden, wobei dann jedes Stück nur ein Bruchteil, nämlich ein Siebentel, notiert $\frac{1}{7}$. Und das Geburtstagskind kriegt zwei Stücke, hat also $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$ Torte. Auch Brüche sind Zahlen, mit denen man rechnen kann, genannt die *rationalen Zahlen*.

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass ein und dieselbe rationale Zahl durch verschiedene Brüche dargestellt werden kann, etwa $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$. Zum Ausdruck kommt dieser Sachverhalt in der sog. *Kürzungsregel*, in der Notation der Buchstabenrechnung

$$\frac{k \cdot p}{k \cdot q} = \frac{p}{q}\,, \tag{3.1}$$

von rechts nach links gelesen genannt *Erweiterungsregel*.

Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen sind in der Bruchdarstellung definiert,

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \;:=\; \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s} \tag{3.2}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \;:=\; \frac{p \cdot r}{q \cdot s}\,. \tag{3.3}$$

Die Definitionen sind unabhängig vom Repräsentanten,

Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ hat die uneingeschränkte Subtraktion ermöglicht. Das wesentlich neue an den rationalen Zahlen ist, dass nun auch die Division uneingeschränkt möglich ist. Genauer: Zu jeder rationalen Zahl $a \neq 0$ gibt es eine Zahl b, so dass $a \cdot b = 1$. Die so bestimmte Zahl b ist eindeutig, notiert $b = \frac{1}{a}$, wobei in der Bruchdarstellung $a = \frac{p}{q}$ verabredungsgemäß $\frac{1}{a} = \frac{q}{p}$, genannt das *(multiplikativ) Inverse* der Zahl a.

Wer nur zwei Kartoffeln hat hat, weniger als 3 Kartoffeln. Und wer $\frac{2}{7}$ Torte hat, hat ein groößeres Stück, als jemand der nur $\frac{1}{7}$ Torte hat. Zahlen lassen sich vergleichen.

Eine Zahl a ist kleiner als eine Zahl b, notiert $a < b$, genau dann wenn die Differenz $b - a$ größer als Null.

Statt "a ist kleiner als b" kann man natürlich auch sagen "b ist größer als a", notiert $b > a$. Und will man offen lassen ob a kleiner oder gleich b schreibt man $a \leq b$, entprechend $b \geq a$ für die Variante "b ist größer oder gleich a".

Hat man zwei rationale Zahlen a, b, lässt sich immer ein Zahl c finden, die dazwischen liegt, beispielsweise $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Iteriert man das Argument stellt man fest, dass zwischen zwei rationalen Zahlen beliebig viele andere rationale Zahlen liegen, und mögen die beiden Zahlen a und b auf der Zahlengeraden noch so eng beieinander liegen.

Es sieht dann so aus, als ob jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine rationalen Zahl entspräche, als ob die Zahlengerade nur aus rationalen Zahlen bestünde. Das ist aber nicht der Fall. Viele, gar unendlich viele Zahlen, sind nicht rational. Das bekannteste Beispiel ist die Zahl $\sqrt{2}$, die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat bzw. die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2 - 2 = 0\,. \tag{3.4}$$

Der Beweis , dass $\sqrt{2}$ nicht rational, ist ein Klassiker. Er findet sich schon ein Euklids Geometrie. Sei also a eine rationale Zahl mit $a^2 = 2$. Dann gibt es ganze Zahlen p und $q > 0$, ohne gemeinsamen Teiler, so dass $a = \frac{p}{q}$ mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ bzw. $p^2 = 2 \cdot q^2$. Folglich p^2 eine gerade Zahl, somit p einer gerade Zahl, $p = 2 \cdot r$, wo r eine ganze Zahl, und $q^2 = 2 \cdot r^2$. Entsprechend auch q eine gerade Zahl, somit p, q nicht teilerfremd, im Widerspruch zur Annahmen. qed

3.2 Der Körper der reellen Zahlen

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist demnach zwar nicht rational, ist mit einem Zirkel auf der Zahlengerade aber durchaus geometrisch konstruierbar. Andere Zahlen, wie beispielsweise π sind auch nicht rational, und sind noch nicht einmal geometrisch konstruierbar[1]

Mit Blick auf die Zahlengerade sagt man, $\mathbb{Q}$ sei dicht aber unvollständig. Vervollständigt werden die rationalen Zahlen in den reellen Zahlen, bezeichnet $\mathbb{R}$. Die Vervollständigung ist etwas verwickelt, und wird daher auf die Ergänzungen verschoben. Für unsere Zwecke reicht es aus, wenn Sie sich unter den reellen Zahlen die Punkte auf der Zahlengerade vorstellen (Mathematiker tun das auch, auch wenn sie das offiziell nicht gerne zugeben). Neue Rechenregeln müssen Sie beim Umgang mit den reellen Zahlen übrigens nicht lernen. Auch für die reellen Zahlen – wie für die rationalen Zahlen – stehen alle vier Grundrechenarten zur Verfügung, und es gelten die Rechenregelen, die Ihnen aus der Elementarmathematik vertraut sind. Eine derarttig strukturierte Menge heißt in der Mathematik ein *Körper* (engl. *field*). Genauer

Definition “Körper”: Ein Körper besteht aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei Verknüpfungen

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \tag{3.5}$$

und

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & (a,b) & \mapsto & a \cdot b \end{array} \tag{3.6}$$

[1] Achtung: der Kreisumfang eine Kreises mit Einheitsdurchmesser beträgt zwar π, aber dieses π lässt sich als Geradenstück mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren. Natürlich können Sie eine Kreisscheibe auf der Zahlengeraden abrollen lassen – womit Sie wüssten, wo ungefähr die Zahl π liegt – aber das ist halt keine geometrische sondern eine physikalische Konstruktion.

die folgenden Axiomen genügen

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+b = b+a$
3. Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit $a+0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$
4. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-a \in \mathbb{K}$ mit $a+(-a) = 0$.
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. $a \cdot b = b \cdot a$
7. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$, $1 \neq 0$, mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$.
8. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a^{-1} \cdot a = 1$.
9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Zugegebenermaßen etwas barock – aber so ist das halt, wenn man ein so mächtiges Werkzeug wie das Rumrechnen mit Zahlen einfangen will ...

Sowohl die rationalen Zahlen als auch die reellen Zahlen erfüllen die Körperaxiome. Man spricht daher auch vom *Körper der rationalen Zahlen* bzw. *Körper der reellen Zahlen*. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Körpern besteht darin, dass die reellen Zahlen – im Gegensatz zu den rationalen Zahlen – halt vollständig ist. Wieder ein anderer Körper, der uns demnächst beschäftigen wird, ist der Körper der komplexen Zahlen.

3.2.1 Ungleichungen

Die reellen Zahlen lassen sich genauso vergleichen wie die rationalen Zahlen. Demnach heißt eine reelle Zahl a genau dann kleiner gleich einer reellen Zahl b, notiert

$a \le b$, wenn $b - a$ nicht negativ. Die Relation $\le$ erfüllt die Kriterien einer *Ordnungsrelation*: sie ist 1. *reflexiv*, denn $a \le a$, 2. *antisymmetrisch*, denn wenn $a \le b$ und $b \le a$, dann gilt $a = b$, und 3. *transitiv*, denn wenn $a \le b$ und $b \le c$, dann gilt $a \le c$. Die Ordnung ist *total*, auch genannt *linear*, denn für jedes beliebige Paar reeller Zahlen lässt sich entscheiden, ob $a < b$, $b < a$ oder $a = b$.

Archimedische Ordnung ...

Einen Ausdruck der Form $a < b$, wie auch einen Ausdruck der Form $a \le b$ nennt man eine *Ungleichung*. Beim Umgang mit Ungleichungen leisten folgende Grundregeln unschätzbare Dienste:

- Für alle a, b, c ist $a \le b$ äquivalent $a + c \le b + c$. Beweis: Die Ungleichung $a \le b$ ist nach Defnition äquivalent $b - a \ge 0$. Und da $b - a = (b + c) - (a + c)$, ist $b - a \ge 0$ äquivalent $(b + c) - (a + c) \ge 0$, und das ist wiederum äquivalent $a + c \le b + c$. qed.

- Bei der Multiplikation muss man mit dem Vorzeichnen etwas aufpassen. Nur wenn c positiv ist $a \le b$ äquivalent $c \cdot a \le c \cdot b$. Ist hingegen c negativ, ist $a \le b$ äquivalent $c \cdot b \le c \cdot a$. (Ohne Beweis).

3.2.2 Intervalle; Supremum, Infimum

Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen sind die *Intervalle*. Man unterscheidet vier Typen

- das offene Intervall $]a, b[:= \{x | a < x < b\}$,

- das abgeschlossene Intervall $[a, b] := \{x | a \le x \le b\}$,

- das linksseitig halboffene Intervall $]a,b] := \{x|a < x \leq b\}$,
- das rechtsseitig halboffene Intervall $[a,b[:= \{x|a \leq x < b\}$.

Nur im abgeschlossenen Intervall findet sich ein kleinstes und ein größtes Element, treffend genannt *Minimum* und *Maximum*. In allen anderen Intervallen fehlt entweder das eine, oder das andere oder gar beide.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt, wenn es $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $x \in M$ gilt $x \leq s$ bzw. $s \leq x$. Das so bestimmte s heißt dann eine obere bzw. untere Schranke für M.

Eine Zahl s heißt Supremum von M , notiert $s = \mathrm{sup}M$, falls s die kleinste obere Schranke für M, d.h. (1) s ist obere Schranke für M, und (2) jede Zahl $s' < s$ ist keine obere Schranke für M.

3.2.3 Absolutbetrag und Signum

Der Absolutbetrag einer Zahl ist definiert

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Der Absolutbetrag einer Zahl, kurz Betrag, ist also selber eine Zahl. Beispielsweise $|-2| = |2| = 2$.

Das Signum einer Zahl ist definiert

$$\mathrm{Sgn}(a) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Offensichtlich $|a| = a \cdot \mathrm{sgn}(a)$. Angesichts $\mathrm{sgn}(a \cdot b) = \mathrm{sgn}(a) \cdot \mathrm{sgn}(b)$ ist $|a \cdot b| = a \cdot b \cdot \mathrm{sgn}(a \cdot b) = a \cdot \mathrm{sgn}(a) \cdot b \cdot \mathrm{sgn}(b) = |a| \cdot |b|$.

Hat man eine Gleichung $a = b$, so ist selbstverständlich auch $|a| = |b|$.

Für das Produkt $a \cdot b$ gilt $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Für die Summe $a + b$ gilt allerdings keineswegs immer $|a+b| = |a|+|b|$, denken Sie nur an $a = -b$ mit $a \neq 0$, dann wäre doch $|a + b| = |a - a| = |0| = 0 \neq 2 \cdot |a|$. Vielmehr

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \tag{3.9}$$

Beweis: Übungen ...

3.2.4 Potenzen und Wurzeln

Fünf mal Fünf ist Fünfundzwanzig, und Fünf mal Fünf mal Fünf ist Fünf mal Fünfundzwanzig ist Hundertfünfunzwanzig. Das Ganze etwas kürzer $5 \cdot 5 = 25$ und $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 25 = 125$. Und noch kürzer $5^2 = 25$ und $5^1 \cdot 5^2 = 5^3 = 125$, wobei wir hier schon verabredet haben $5^1 := 5$, lies "5-hoch-Eins ist gleichbedeutend 5". Die hier auftretenden "Hochzahlen" 1, 2, 3 heißen *Exponenten*, und eine Zahl wie 5^3 nennt man eine *Potenz* von 5.

Ein Fünftel von einem Fünftel ist sehr wenig, nämlich nur ein Fünfundzwanzigstel, und ein Fünftel von einem Fünftel von einem Fünftel ist noch weniger, nämlich nur ein Fünftel von einem Fünfundzwanzigstel, und das ist ein Hundertfünfundzwangstel. Ok – kürzer: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ und $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{125}$. Und jetzt noch kürzer $5^{-2} = \frac{1}{25}$ und $5^{-1} \cdot 5^{-2} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$, wobei wir hier verabredet haben $5^{-1} := \frac{1}{5}$ und $5^{-n} := (5^{-1})^n \equiv 5^{-1 \cdot n}$.

Die 5 ersetzen wir jetzt mal durch einen Buchstaben a, der für irgendeine reelle Zahl stehen möge, und die Exponenten ersetzen wir durch einen Buchstaben p, der für irgendeine *ganze Zahl* stehen möge.

Definition “Potenz”: Sei a reelle Zahl; dann ist die *Potenz* a^n für ganze, nicht-negative Zahlen $n \geq 0$ rekursiv definiert,

$$a^0 := 1\,, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n \qquad (n \geq 0) \tag{3.10}$$

Sofern $a \neq 0$ sei fürderhin

$$a^{-n} := (a^{-1})^n \tag{3.11}$$

Die Definition bedeutet, dass für jede Zahl $a \neq 0$ der Wert von a^p für beliebige ganze Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ bestimmt ist. Wegen “Minus-Mal-Minus-ist-Plus” gilt

$$(-1)^p = \begin{cases} +1 & \text{für } p \text{ gerade Zahl} \\ -1 & \text{für } p \text{ ungerade Zahl} \end{cases} \tag{3.12}$$

Außerdem gelten die Rechenregeln

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \tag{3.13}$$
$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \tag{3.14}$$
$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \tag{3.15}$$

für nicht-negativen ganzen Zahlen p, q und, falls a und b von 0 verschieden sind, für alle ganzen Zahlen p, q. Man beachte, dass es für das Produkt $a^p \cdot b^q$ *keine* einfache Rechenregel gibt.

Sie erinnern sich – Rechenregeln sind immer beweisbedürftig bevor man sie im Alltag benutzt ....

Die Gleichung $x^n = x^n$ ist eine Banalität, über die zu reden nicht weiter lohnt. Die rechte Seite ist eine Zahl, nennen wir sie a. Die Banalität erscheint jetzt in der Form $x^n = a$, und wird für gegebenes a zur Frage: welche Zahlen x sind es, deren jeweilige n-te Potenz die Zahl a liefern? Die Mehrzahlform ist hier mit Bedacht gewählt: Sei nämlich für n gerade eine Zahl x_0 Lösung der Gleichung $x^n = a$, also $x_0^n = a$, dann ist wegen () auch $-x_0 \equiv -1 \cdot x_0$ eine Lösung! Ist allerdings n ungerade, entfällt diese Möglichkeit: das Vorzeichen von x_0 ist in diesem Falle durch das Vorzeichen von a bereits bestimmt.

Lösungen der Gleichung $x^n = a$ heißen *Wurzeln* von a. Für nicht-negative a definiert

$$a^{\frac{1}{n}} \tag{3.16}$$

die sog. *positive Wurzel* der Gleichung $x^n = a$. Die Notation respektiert (), denn $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$.

Sofern n eine ungerade Zahl ist die positive Wurzel die einzige Wurzel von $x^n = a > 0$. Sofern n ein gerade Zahl, sind die positive Wurzel und die negative Wurzel $-(a)^{\frac{1}{n}}$ Wurzeln von $x^n = a$. Im Falle negativer a, also $a < 0$, ist die Gleichung $x^n = a$ nur für ungerade n lösbar, mit eindeutig bestimmter Wurzel $-(-a)^{\frac{1}{n}}$.

3.3 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl n kürzt man in der Notation ab,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \tag{3.17}$$

genannt "n-Fakultät", und vereinbart $0! := 1$. Die Fakultät spielt eine große Rolle in der sog. *Kombinatorik*.Die Zahl $n!$ ist genau die Zahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte in einer Reihe anzuordnen (äquivalent: Die Zahl $n!$ ist die Anzahl der Permutationen n verschiedener Elemente).

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.18}$$

Man beachte, dass es sich trotz des Bruchstrichs bei einem Binomialkoeffizienten immer um eine natürliche Zahl handelt. Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist genau die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nicht leeren Menge mit n Elementen (Beweis: Übung).

Seinen Namen verdankt der Binomialkoeffizient dem *Binomischen Satz*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{3.19}$$

den Sie in den Übungen beweisen.

3.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 3-1** (π Punkte)

Gehen Sie an eine Kreidetafel und skizzieren Sie freihändig (ohne Hilfsmittel!) die sog. *Zahlengerade* (Länge ca 150cm. Warum?). Vergessen Sie nicht, anzugeben wo 0 und 1 liegen, evtl. auch andere Zahlen wie 2/3, 17/13 oder gar π und e. Kann man Ihre Skizze auch entziffern, wenn man ganz hinten sitzt?

▷ **Aufgabe 3-2**

Bezüglich Addition und Multiplikation zweier Ungleichungen gelten folgende Sätze, die wir Sie bitten zu beweisen:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } a \le b \text{ und } c < d, &\quad \text{dann} \quad a + c < b + d \\ \text{Wenn } a \le b \text{ und } c \le d, &\quad \text{dann} \quad a + c \le b + d \\ \text{Wenn } 0 \le a < b \text{ und } 0 \le c < d, &\quad \text{dann} \quad a \cdot c < b \cdot d \\ \text{Wenn } 0 \le a \le b \text{ und } 0 \le c \le d, &\quad \text{dann} \quad a \cdot c \le b \cdot d \end{aligned} \tag{3.20}$$

▷ **Aufgabe 3-3**

Beweisen Sie

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \tag{3.21}$$

▷ **Aufgabe 3-4** (5 Punkte)

Beweisen Sie: “Die Anzahl aller möglichen Anordnungen n verschiedener Elemente ist $n!$.”

▷ **Aufgabe 3-5** (6 Punkte)

Sie erinnern sich – neben der Fakultät stößt man in der Kombinatorik häufig auf Binomialkoeffizienten,

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{3.22}$$

(a) Zeigen Sie: die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nicht leeren Menge mit n Elementen ist im Falle $0 < k \leq n$ gegeben $\binom{n}{k}$.

(b) Seinen Namen verdankt der Binomialkoeffizient dem *Binomischen Satz*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{3.23}$$

den wir Sie bitten zu beweisen.

Binomialkoeffizienten notiert man zuweilen in einem sog. *Pascal'schen Dreieck*. Schauen Sie mal irgendwo nach …

▷ Aufgabe 3-6

Für die Binomialkoeffizienten beweise man die *Rekursionsformel*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \tag{3.24}$$

▷ Aufgabe 3-7 (6 aus 49)

Wie groß ist die W'keit, 6 Richtige beim Lotto "6 aus 49" zu tippen?

▷ Aufgabe 3-8 (Fermistatistik)

Die Grundaufgabe der Fermistatistik lautet: Auf n Zellen sollen k nicht unterscheidbarer Teilchen so verteilt werden, dass jede Zelle höchstens ein Teilchen enthält. Man zeige, dass es hier genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Verteilungen gibt.

▷ Aufgabe 3-9 (Bose-Einstein Statistik)

Die Grundaufgabe der Bose-Einstein Statistik lautet: Auf n Zellen sollen k nicht unterscheidbare Teilchen verteilt werden, wobei jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann. Man zeige, dass es hier genau $\binom{n+k-1}{k}$ verschiedene Verteilungen gibt.