Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Die Feststellung, dass $x + 2 = 1$ keine Lösung in den Natürlichen Zahlen hat, führte zur Erfindung der ganzen Zahlen. Und die Feststellung dass $2x = 1$ keine Lösung in den ganzen Zahlen hat, führte zur Erfindung der rationalen Zahlen. Die Einsicht, dass $x^2 = 2$ keine Lösung in den rationalen Zahlen hat führte zur Erfindung der rellen Zahlen. Und die Einsicht dass $x^2 = -1$ keine Lösung in den reellen Zahlen hat führte zur Erfindung der – Tata Tata! –*komplexen Zahlen*.

4.1 Definition

Definition: Unter dem *Körper der komplexen Zahlen*, bezeichnet $\mathbb{C}$, versteht man die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zusammen mit den beiden Verknüpfungen

$$(x, y) +_{\mathbb{C}} (u, v) := (x + u, y + v)\,, \tag{4.1}$$

$$(x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) \tag{4.2}$$

genannt *komplex-Addition* und *komplex-Multiplikation*.

Die Verknüpfungen sind assoziativ und kommutativ und genügen dem Distributivgesetz. Vor diesem Hintergrund erlauben wir uns eine kleine Schlamperei, und lassen das Präfix “komplex-” und Subskript $\mathbb{C}$ unter den Tisch fallen.

Paare vom Typ $(0, y)$ lassen sich mit der Abkürzung

$$i := (0, 1) \tag{4.3}$$

und Blick auf () auch schreiben $(y, 0) \cdot i$ bzw – die komplexe Multiplikation ist kommutativ – $i \cdot (y, 0)$. Mit Blick auf () erhält man $(x, y) = (x, 0) + i \cdot (y, 0)$, und da Paare vom Typ $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ sich bzgl. der komplexen Addition und Multiplikation genauso verhalten wie die reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation, dürfen die Paare $(x, 0)$ mit reellen Zahlen x identifiziert werden, und man schaut auf die heutzutage gebräuchliche Schreibweise einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$,

$$z = x + iy \tag{4.4}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und

$$i \cdot i \equiv i^2 = -1 \tag{4.5}$$

Man nennt die reellen Zahlen x und y den *Realteil* und den *Imaginärteil* von z. Und die Zahl i nennt man zuweilen “Wurzel-aus-Minus-Eins”, $i = \sqrt{-1}$. Man könnte sie auch “Minus Wurzel-aus-Minus-EIns” nennen, schließlich ist auch $(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$, aber wir bleiben bei “$i$ ist die positive Wurzel-aus-Minus-Eins”.

Gerechnet wird mit komplexen Zahlen genauso wie mit reellen Zahlen, wobei Produkte von i unter Verwendung von $i^2 = -1$ vereinfacht werden,

$$(x + iy) + (u + iv) = x + u + i(y + v)\,, \tag{4.6}$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = x \cdot u - y \cdot v + i(y \cdot u + x \cdot v)\,. \tag{4.7}$$

4.2 Gauss'sche Zahlenebene

Komplexe Zahlen lassen sich als Punkte einer Zahlenebene $\simeq \mathbb{R}^2$ darstellen, genannt die *Gauss'sche Zahlenebene*. In Gauss' eigenen Worten[1]

> So wie man sich das ganze Reich aller rellen Größen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abzisse= a Ordinate= b bestimmt, die Größe $a + ib$ gleichsam repräsentiert.

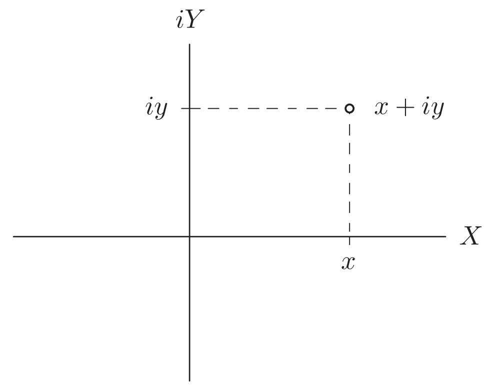

Abb 4.1 *Die Gauss'sche Zahlenebene.*

Heutzutage nennt man die Abzisse in diesem Zusammenhang auch die *reelle Achse*, und die Ordintate die *imaginäre Achse*.

Man kann nun mit jeder komplexen Zahl einen Zeiger zuweisen dessen Schaft im Ursprung und dessen Spitze auf die jeweils gewünschte Zahl zeigt. Die Addition zweier Zahlen indem man einen der beiden Zeiger parallel verschiebt, so dass sein Schaft mit der Spitze des anderen Zeigers zusammenfällt. Der resultierende Zeiger ist dann das Bild der Summe. Welchen der beiden Zeiger man verschiebt ist dabei ganz gleichgültig – die Addition ist schließlich kommutativ.

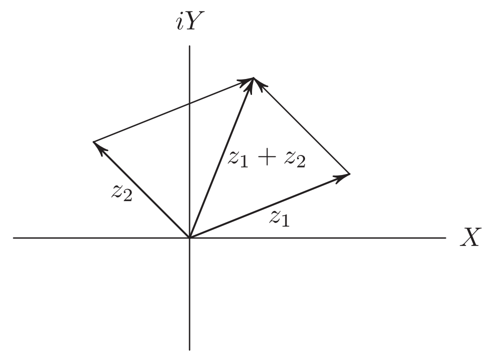

Abb 4.2 *Die Addition zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 mittels Parallelogrammregel in der Zeigerdarstellung.*

Nützlich in diesem Zusammenhang die zu einer komplexen Zahl $z = x+iy$ *konjugiert komplexe* Zahl

$$z^* := x - iy \tag{4.8}$$

[1] zitiert nach Ebbinghaus et al. *Zahlen*, S. 49f

die man in der Gausschen Zahlenebene durch Spiegelung an der reellen Achse erhält. Leicht überzeugt man sich von den Regeln

$$(z+w)^* = z^* + w^* , \tag{4.9}$$
$$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^* , \tag{4.10}$$
$$(z^*)^* = z . \tag{4.11}$$

Lies: die Konjugation einer Summe bzw. eines Produkts ist die Summe bzw. das Produkt der konjugierten und Doppelkonjugation ist wie nix tun.

Mit Hilfe der Konjugation lassen sich Real- und Imaginärteil extrahieren,

$$\Re(z) = \frac{z+z^*}{2} , \qquad \Im(z) = \frac{z-z^*}{2i} \tag{4.12}$$

was sich als nützlich erweist, wenn man z nicht schon als Summe von Real- und Imaginärteil gegeben hat.

Das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrer konjugierten z^*,

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 \tag{4.13}$$

ist nach Pythagoras die *Quadratlänge* der geometrischen Strecke $0z$. Die Länge selber

$$|z| := \sqrt{z \cdot z^*} \equiv \sqrt{x^2+y^2} \tag{4.14}$$

nennt man den *Betrag* der komplexen Zahl z.

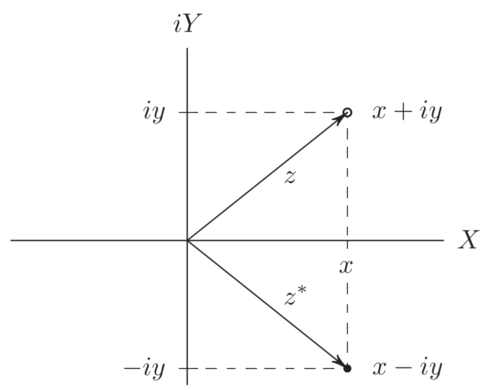

Abb 4.3 *Eine komplexe Zahl z und ihre komplex-konjugierte Schwester z^* in der Zeigerdarstellung.*

Kehrwertbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ lässt sich jetzt leicht geometrisch deuten. Es ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} \tag{4.15}$$

$$= \frac{z^*}{z \cdot z^*} \tag{4.16}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \tag{4.17}$$

$$= \left(\frac{1}{|z|} \frac{z}{|z|} \right)^* \tag{4.18}$$

und da $\frac{z}{|z|}$ komplexe Zahl vom Betrag 1 in Richtung z, die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}$ eine *Spiegelung am Einheitskreis*, ist $\frac{1}{z}$ nichts anderes als z gespiegelt am Einheitskreis gefolgt von einer Spiegelung an der reellen Achse.

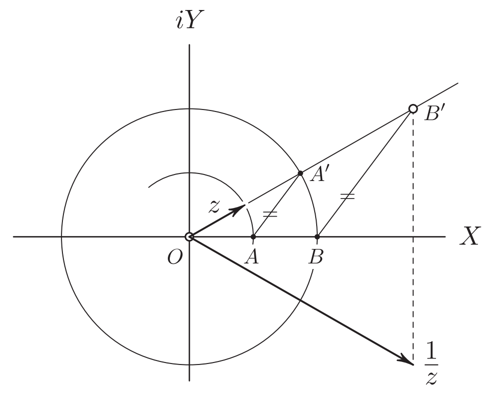

Abb 4.4 *Kehrwertbildung geometrisch, mittels Spiegelung am Einheitskreis: Wegen Strahlensatz $OB' : OA' = OB : OA$, und da $OB = OA' = 1$ (Einheitskreis!) folgt $OB' = 1 : OA = 1 : |z|$. Der Punkt A' bezeichnet die komplexe Zahl $\frac{z}{|z|}$ (die vom Betrag 1 ist), der Punkt B' bezeichnet die komplexe Zahl $\frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}$.*

4.3 Polardarstellung

Erinnert man sich an dieser Stelle an die geometrische Definition des Cosinus und Sinus, wundert man sich gar nicht mehr, wenn man die komplexe Zahl $z = x + iy$ auch darstellen kann

$$z =: \varrho \cos\varphi + i\varrho \sin\varphi \tag{4.19}$$

worin φ der Winkel, den der Zeiger z mit der reellen Achse bildet, und ϱ seine Länge,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \tag{4.20}$$

$$\varrho = |z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4.21}$$

Gl. (4.19) definiert die sog. *Polardarstellung* von z, im Unterschied zu $z = x + iy$, die in diesem Zusammenhang auch die *kartesische Darstellung* von z genannt wird.

Unter Bezug auf die Exponentialfunktion behaupten wir nun die *Eulersche Formel*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{4.22}$$

so dass

$$z = |z|e^{i\varphi} \tag{4.23}$$

Die *Exponentialfunktion*, auch genannt *Eulersche e-Funktion*, ist die "Mutter aller Funktionen" (Jänich). Vielleicht kennen Sie die e-Funkton aus der Schule. Und wenn, dann vermutlich für reelle Argumente. Wenn aber nicht, dann ist das auch nicht schlimm. Schieben wir halt eine kleine Erläuterung zur Exponentialfunktion dazwischen.

Wir nennen $\cos\varphi + i\sin\varphi := f(\varphi)$, und wollen zeigen, dass $f(\varphi) = e^{i\varphi}$. Zunächst stellen wir mal fest $|f(\varphi)| = 1$, d.h. für beliebiges reelles φ liegt $f(\varphi)$ in der Gauss'schen Zahlenebene auf dem Einheitskreis. Dann stellen wir fest $f(\varphi)^* = f(-\varphi)$. Schließlich stellen wir fest $f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta)$.

WIr differenzieren nach φ, erhalten wegen $[\cos\varphi]' = -\sin\varphi$ und $[\sin\varphi]' = \cos\varphi$ die Aussage $f' = if$.

4.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 4-1**

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$.

(a) Bilden Sie die Summe z_1+z_2 und Differenz z_1-z_2 arithmetisch und zeichnerisch mittels Zeigerdarstellung in der Gauss'schen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie die Absolutbeträge $|z_1|$, $|z_2|$.

(c) Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Bruch $\frac{z_1}{z_2}$, jeweils in der Form $u+iv$ mit u, v reell.

▷ Aufgabe 4-2

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z_1 = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, $z_2 = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$, worin α, β zwei reelle Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und zeigen Sie, dass $z_1 \cdot z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$.

Hinweis: Erinnern Sie sich beizeiten an die Additionstheoreme der Trigonometrie. Falls Sie diese vergessen haben, oder mit dem Begriff überhaupt nichts anfangen können, schauen Sie mal unter dem entsprechenden Stichwort in ein Lehrbuch, ein Schulbuch, oder eine Formelsammlung ...

▷ Aufgabe 4-3 (Dreiecksungleichung)

Man beweise und interpretiere in der Zeigerdarstellung, dass für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,, \tag{4.25}$$

sog. emphDreiecksungleichung.