Kapitel 6

Metrik, Norm und Skalarproduktl

Aus Ihrer täglichen Praxis sind Ihnen die Begriffe *Abstand* und *Länge*, möglicherweise gar *Winkel* wohlvertraut.

6.1 Metrik (Abstand)

Definition "Metrik": Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik in M, genau dann wenn

(Met1) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$

(Met2) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$

(Met3) $d(x,y) = d(y,x)$

(Met4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Man nennt $d(x, y)$ auch den *Abstand* der beiden Punkte $x, y \in M$, entsprechend d eine *Abstandsfunktion*. Ist auf einer Menge M eine Metrik d eingeführt, sagt man M sei ein *Metrischer Raum*, notiert (M, d).

Die Axiome (1)–(3) geben dem intuitiven Abstandbegriff eine Form: Abstände sind positiv (niemand würde die Aussage "Der Abstand von Berlin und Potsdam beträgt Minus-Sieben-Meilen" verstehen), der Abstand zwischen Potsdam und Potsdam ist Null, der Abstand von Potsdam und Berlin ist der gleiche wie der Abstand von Berlin und Potsdam. Axiom (4) nennt man auch *Dreiecksungleichung*: der Abstand je zweier Punkte eines Dreiecks ist immer kleiner gleich der Summe der Abstände der beiden Punkte zum dritten Punkt.

Beispiel: Die Menge(!) $\mathbb{R}^n$ mit

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{6.1}$$

ist ein metrischer Raum. Die hier ausgezeichnete Abstandsfunktion ist eine kartesische Darstellung der *Euklidischen Metrik*. Wer den Satz des Pythagoras nicht vergessen hat, wird sich über die Definition () nicht wundern. Man beachte allerdings, dass auch $d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ oder gar $d_2 := \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|)$ akzeptable Metriken für $\mathbb{R}^n$.

6.2 Norm (Länge) und Skalarprodukt (WInkel)

Vom Begriff des Abstands ist der Begriff der Länge wohl zu unterscheiden: Ein Ding befindet sich in einem gewissen Abstand zu einem anderen Ding – Abstand ist eine Paarbeziehung. Im Gegensatz dazu bezieht sich der Begriff der Länge auf nur ein Ding (ein Zollstock, ein Weg). Der mathematische Längenbegriff von Vektoren ist der Begriff der Norm, und so ist sie definiert:

Defintion "Norm": Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ist eine *Norm* in V genau dann wenn

(1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ wobei $\|\vec{v}\| = 0$ nur genau dann, wenn $\vec{v} = o$.

(2) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$

(3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Ein Vektor $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ heißt *Einheitsvektor*. Ist ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, sagt man V sei ein *normierter* Vektorraum, notiert $(V, \|\cdot\|)$. Ein normierter Vektorraum ist immer auch ein metrischer Raum: die mit $d(x,y) := \|x-y\|$ definierte Abbildung genügt den Axiomen einer Metrik! Man sagt, die Norm (des Vektorraums V) *induziere* ein Metrik (auf der Grundmenge V).

Der Norm eines Vektors entspricht die Länge seiner Pfeildarstellung in der Euklidischen Geomtrie, und Längen sind positiv, was in (1) zum Ausdruck gebracht wird. Strecken (oder Stauchen) bedeutet nach (2) verlängern bzw. verkürzen. Und in (3) ist die Elementarweisheit für ein Dreieck ausgedrückt, dass nämlich im Dreieck jede Seite kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Beispiel: Der Vektorraum(!) $\mathbb{R}^n$ ist mit

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2} \tag{6.2}$$

ein normierter Vektorraum. Offensichtliche induziert $\|\cdot\|$ genau die in () vereinbarte Metrik für die Menge $\mathbb{R}^n$.

Definition "Skalarprodukt": Sei V reeller Vektorraum. Eine Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ein *Skalarprodukt* genau dann wenn

(1) $g(\vec{u}, \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 g(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 g(\vec{u}, \vec{v}_2)$ und $g(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 g(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 g(\vec{u}_2, \vec{v})$ (g ist *bilinear*)

(2) $g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})$ (g ist *symmterisch*)

(3) $g(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$ und $g(\vec{v},\vec{v}) = 0$ nur für $\vec{v} = o$ (g ist *nicht ausgeartet*)

Ist ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt versehen, redet man von einem *Euklidischen* Vektorraum, notiert (V, g). Statt $g(\vec{u},\vec{v})$ notiert man das Skalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auch gerne $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$, oder noch kürzer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Wir benutzen – sofern nicht anders gesagt – die Punktnotation.[1]

Die Abbildung $\vec{v} \mapsto \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ genügt den Normaxiomen, daher ist

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,. \tag{6.3}$$

eine Norm für $(V, \cdot)$.

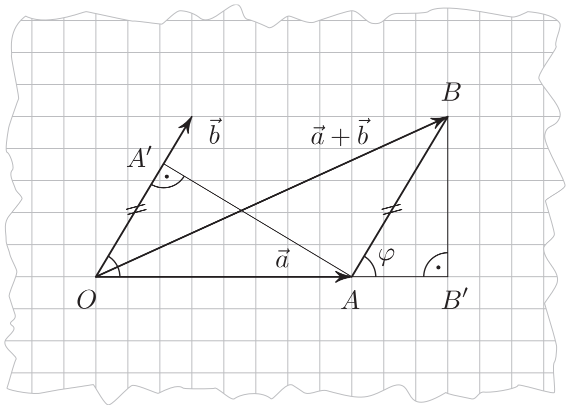

Abb 6.1 *Geometrsiche Deutung des Skalarprodukts im Kosinussatz.*

Aus der Elementargeometrie ist Ihnen der Satz des Pythagoras vertraut: in einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten, $c^2 = a^2 + b^2$. Ein Korellar ist der *Kosinussatz*: $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi)$ worin φ der durch a und b gegebenen Außenwinkel (? muss ich noch richtig bezeichnen).

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) && (6.4)\\
&= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u} && (6.5)\\
&= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} && (6.6)
\end{aligned}$$

Vergleich mit dem Kosinussatz der Geometrie

$$\vec{u}\cdot\vec{v} =: \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\varphi \tag{6.7}$$

[1] Das Skalarprodukt in komplexen Vektorräumen genügt ähnlichen Axiomen: (1a) und (3) unverändert, (2) wird ersetzt durch $g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})^*$, und (1b) entsprechend $g(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2,\vec{v}) = \lambda_1^* g(\vec{u}_1,\vec{v}) + \lambda_2^* g(\vec{u}_2,\vec{v})$ (das Sternchen bedeutet Komplex-Konjugation). Ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt firmiert auch unter der Bezeichnung *unitärer* Vektorraum.

worin φ der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildete Winkel. Entsprechend heißen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Hat man einen Vektor $\vec{u}$, lässt sich jeder Vektor $\vec{v}$ zerlegen $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$, worin $\vec{v}_\perp$ senkrecht auf $\vec{u}$, und $\vec{v}_\parallel$ Vielfaches von $\vec{u}$, genauer $\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$, und $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel$. Die Zerlegung ist eindeutig. Im *Erhard Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren* wird sie benutzt, um eine gegebene V-Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ zu orthonormieren:

$$\vec{e}_1 := \frac{1}{\|\vec{b}_1\|}\vec{b}_1\,, \qquad \vec{e}_i := \frac{\vec{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{b}_i)\vec{e}_k}{\left\|\vec{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{b}_i)\vec{e}_k\right\|}\,, \qquad i = 2, \ldots, n\,. \tag{6.8}$$

Per Konstruktion definiert $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ eine sog. *Orthonormalbasis* von V, also eine Vektorraumbasis mit

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{6.9}$$

Seien nun $\vec{v}$ und $\vec{u}$ zwei Vektoren, nach der Orthonormalbasis entwickelt $\vec{v} = \vec{e}_i v^i$ und $\vec{u} = \vec{e}_i u^i$, erhält man für ihr Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{e}_i v^i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \vec{e}_j v^j\right) = \sum_{ij} v^i u^j \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{=\delta_{ij}} \\ &= v^1 u^1 + v^2 u^2 + \cdots + v^n u^n\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

bzw. mit Einstein'scher Summenkonvention kurz und bündig $\vec{u} \cdot \vec{v} = \delta_{ij} u^i v^j$.

6.3 Kreuzprodukt (Fläche) und Spatprodukt (Volumen)

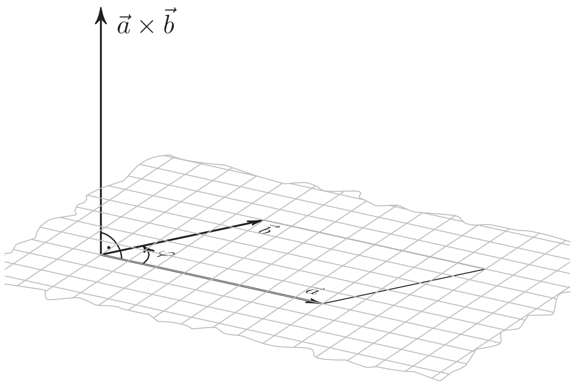

Abb 6.2 *Geometrsiche Deutung des Kreuzprodukts.*

Geometrisch bestimmen zwei linear unabhängige Vektoren im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ ein Parellogramm. Mit f der Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist das *Kreuzprodukt* der beiden Vektoren definiert

$$\vec{a} \times \vec{b} = f\vec{e}\,, \qquad f = ab\sin\varphi \tag{6.11}$$

worin $\vec{e}$ derjeinige Einheitsvektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ aund $\vec{b}$ steht und zusammen mit $\vec{a}, \vec{b}$ ein sog. *Rechtssystem* bildet.

Die Auszeichnung eines Rechtssystems (anstelle eines Linkssystems) ist äquivalent der Entscheidung für eine von zwei möglichen *Orientierungen* eines Flächenstücks. Ohne Orientierung könnten Sie zwei verschiedene Vektoren $\vec{e}$ und $-\vec{e}$ angeben, die beide auf der gegebenen Fläche senkrecht stehen.

Dass wir hier überhaupt eine Alternative haben, bedeutet mathematisch die *Antisymmetrie* des Kreuzprodukts,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{6.12}$$

und die wiederum bedeutet

$$\vec{a} \times \vec{a} = o\,, \tag{6.13}$$

denn der o-Vektor ist der einzige Vektor für den gilt $-o = o$.

Das Kreuzprodukt ist *bilinear* – eine Eigenschaft, die angesichts () formuliert werden darf

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,. \tag{6.14}$$

Das Kreuzprodukt ist aber *nicht assoziativ*. Vielmehr

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})\,. \tag{6.15}$$

was man sich vielleicht als "bac-cab" Regel einprägt.

Jacobi

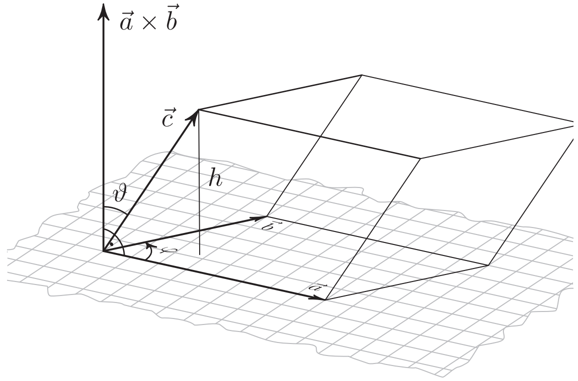

Abb 6.3 *Geometrsiche Deutung des Spatprudukts.*

Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ definieren ein *Parallelepiped*, weniger zungenbrecherisch genannt *Spat*. Der Spat ist ein geometrischer Körper, dessen Volumen Vol gegeben ist "Grundfläche f mal Höhe h", kurz $V = fh$. Welche Seite (engl. *face*) dabei als "Grundfläche" fungiert ist ganz beliebig, wir wählen die von $\vec{v}, \vec{w}$ gebildete Fläche. Grundfläche ist dann $f = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$. "Höhe" ist die Projektion von $\vec{u}$ auf den Flächennormaleneinheitsvektor, $h = \left|\vec{u} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{f}\right|$, wobei der Betrag garantiert, dass "Höhe" nicht negativ. Das Volumen des Spats ist demnach gegeben

$$\mathrm{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|\ . \tag{6.16}$$

Das hier auftretende gemischte Produkt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ nennt man aus naheliegenden Gründen das *Spatprodukt*. Das Spatprodukt additiv und homogen in jedem Faktor, beispielsweise

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot ((\vec{b} + \vec{v}) \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) \quad \text{(additiv)} && (6.17) \\ \vec{a} \cdot ((\lambda \vec{b}) \times \vec{c}) &= \lambda(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) \quad \text{(homogen)} && (6.18) \end{aligned}$$

und alternierend unter Vertauschung zweier beliebiger Faktoren, etwa

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) \tag{6.19}$$

Alternierend besagt, dass sich unter einem Austausch zweier Kantenvektoren zwar die Orientierung des Spats ändert, sein Volumen davon aber unberürt bleibt. Entsprchend hat ein Spat mit zwei linear abhängigen Kantenvektoren das Volume Null, beispielsweise

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0\,. \tag{6.20}$$

Homogenität besagt, dass wenn ein spannender Kantenvektor mit einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht wird, sich das Spatvolumen mit einen entsprechenden Faktor ändert. Linearität und Antisymmetrie implizieren, dass das Volumen eines Spats scherinvariant ist, etwa

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\,. \tag{6.21}$$

Beliebigkeit der Wahl der Grundfläche bedeutet

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u} = (\vec{w}\times\vec{u})\cdot\vec{v}\,. \tag{6.22}$$

Das Kreuzprodukt, wie auch das Spatprodukt wurden bislang rein geometrisch formuliert, d.h. ohne Bezug auf ein konkretes Vektorraum-Koordinatensystem, ohne Bezug auf eine Basis. Bei den meisten Anwendungen in der Physik sind Vektoren aber über ihre Komponenten in einer irgendwie gewählten Basis gegeben. Und die beliebteste Basis in der Physik ist eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, worin nun neben $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$ die zusätzliche Festlegung

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3\,,\quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1\,,\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \tag{6.23}$$

den Vektorraum $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orientiert.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ ist dann

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i v^i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j w^j\right) &= \sum_{ij} u^i v^j \vec{e}_i\times\vec{e}_j \\
&= v^1w^1\vec{e}_1\times\vec{e}_1 + v^1w^2\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + \ldots + v^3w^2\vec{e}_3\times\vec{e}_2 + v^3w^3\vec{e}_3\times\vec{e}_3 \\
&= \vec{e}_1\left(v^2w^3 - v^3w^2\right) - \vec{e}_2\left(v^1w^3 - v^3w^1\right) + \vec{e}_3\left(v^1w^2 - v^2w^1\right) \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

bzw. in Spaltenvektornotation

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2w^3 - w^3v^2 \\ v^3w^1 - v^1w^3 \\ v^1w^2 - v^2w^1 \end{pmatrix} . \tag{6.25}$$

Den Ausdruck für das Spatprodukt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ erhählt man, indem in Gl. (6.24) die $\vec{e}_i$ durch u^i ersetzt werden,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = u^1 \left(v^2w^3 - v^3w^2\right) - u^2 \left(v^1w^3 - v^3w^1\right) + u^3 \left(v^1w^2 - v^2w^1\right) \tag{6.26}$$

Das Spatprodukt lässt sich auch mittels der sog. *Determinante* ausdrücken,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \equiv \det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

Das 3×3 rechteckige Zahlenschema nennt man eine *Matrix*. WIe sich die Determinante einer solchen 3×3-Matrix berechnet, läßt sich aus () ablesen.

Im Gegensatz zum Spatprodukt, das so nur ein einem dreidimensionalen Vektorraum definiert werden kann, lässt sich mittels Determinante auch das Spatvolumen in Vektorräumen beliebiger Dimension erklären. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ die n spannenden Kantenvektoren eines n-Spats (ein n-Spat ist ein Parallelepiped in einem n-dimensionalen Vektorraum)

$$\mathrm{Spat}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \left\{ \sum \lambda^j \vec{v}_j \middle| 0 \leq \lambda^j \,, j = 1, \ldots, n \right\} , \tag{6.28}$$

dann ist das Spatvolumen gegeben

$$\mathrm{Vol}[\mathrm{Spat}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)] = |\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)| . \tag{6.29}$$

Die Determinante ist in jedem Eintrag homogen und linear,

$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \lambda\vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = \lambda \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) \tag{6.30}$$

$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j + \vec{v}, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}, \ldots, \vec{v}_n) \tag{6.31}$$

und sie ist alternierend,

6.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 6-1**

Gegeben drei Vektoren (vgl. Aufgabe 5(b) vom Übungsblatt 5)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

▷ **Aufgabe 6-2**

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

Berechnen Sie das Spatprodukt.
Hinweis: Auf übungsblatt 5, Aufgabe 5(a) haben Sie schon gezeigt, dass diese drei Vektoren linear abhängig. Müssen Sie das Spatprodukt also wirklich ausrechnen, oder können Sie die Antwort gleich hinschreiben?

▷ Aufgabe 6-3

Unter einem Ortsvektor $\vec{x}$ versteht man einen Vektor, dessen Schaft in einem besonderen Punkt, dem "Ursprung" O befestigt ist, und dessen Spitze einen Raumpunkt P bezeichnet. Wählt man eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i$, fungieren die Komponenten x^1, x^2, x^3 des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{e}_i x^i$ als kartesische Koordinaten von P. Dabei zeigt $\vec{e}_1$ vereinbarungsgemäß in Richtung der X-Achse, $\vec{e}_2$ in Richtung der Y-Achse, und $\vec{e}_3$ in Richtung der Z-Achse. Die Komponenten von $\vec{x}$ schreibt man dann auch x, y, z statt des verwirrenden x^1, x^2, x^3.

Hat man nun eine Vektorgleichung, beispielsweise $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$, bestimmen deren Lösungen ein geometrisches Objekt. Im Falle $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$ sind alle Ortvektoren $\vec{x}$ Lösung, die senkrecht auf $\vec{e}_3$ stehen. Das sind aber alle diejenigen Ortsvektoren, deren Z-Komponente gleich Null, und die Endpunkte dieser Vektoren bilden eine Ebene, die XY-Ebene!

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x}| = 1$ bestimmt?

(b) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ bestimmt, wobei $\vec{x}_0$ fester Ortsvektor und R ein festes Skalar?

(c) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ bestimmt, wobei $\vec{e}$ fester Einheitsvektor?

(d) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ bestimmt, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ feste Vekoren?
Hinweis: Eigentlich sind das drei Gleichungen. Warum?

(e) Überzeugen Sie sich davon, dass mit $\vec{x} \cdot \vec{k} = k^2$ für festes $\vec{k}$ und $k = |\vec{k}|$ der Betrag von $\vec{k}$ die Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ im Abstand k vom Ursprung ausgezeichnet ist.

Der Duck einer Schallwelle kann in der Form $p(\vec{x},t) = p_0 + f(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$ angegeben werden, worin f irgendeine "schöne" Funktion (nicht unbedingt Sinus oder Cosinus).

(f) Bestimmen Sie die Orte an denen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 der Druck $p_0 + f(0)$ herrscht.

(g) Wie bewegt sich das in (f) bestimmte geometrische Objekt, und welches ist gegebenenfalls seine Geschwindigkeit?

Bemerkung: In (f) und (g) begegnet Ihnen ein wichtiges physikalisches Konzept – die *ebene Welle*. Warum die wohl "eben" heißt?