Kapitel 8

Elemente der Matrizenrechnung

Die Untersuchung linearer Abbildungen, so die Moral des letzten Kapitels, ist Matrizenlehre: was man mit Matrizen alles so machen kann, und welche Eigenschaften sie aufweisen.

Matrizen begegnen einem aber auch in ganz anderen Zusammenhängen. Betrachte etwa `[Hier nun Beispiel lineares Gleichungssystem aus der Praxis]`

8.1 Rechenregeln

Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschame bestehend aus m Zeilen und n Spalten,

$$A = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & \cdots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \cdots & a^m{}_n \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, wieviele Zeilen und Spalten gemeint sind, schreibt man hier einfach $A = (a^i{}_j)$.

Die Gesamtheit aller $m \times n$-Matrizen können zu einer Menge zusammengefasst werden, bezeichnet $M(m{\times}n, \mathbb{R})$. Verabredet man für zwei beliebige Matrizen $(a^i{}_j), (b^i{}_j) \in M(m{\times}n, \mathbb{R})$ via $(a^i{}_j){+}(b^i{}_j) := (a^i{}_j{+}b^i{}_j)$ eine *Matrixaddtion*, und via $\lambda(a^i{}_j) := (\lambda a^i{}_j)$ eine *Matrix-Skalarmultiplikation*, erhält $M(m \times n, \mathbb{R})$ die Struktur eines Vektorraums. Da sich der Vektorraum(!) $M(m \times n, \mathbb{R})$ nur durch die Schreibweise der Elemente – im Rechteck statt in einer hohen Spalte – vom $\mathbb{R}^{mn}$ unterscheidet, hat er die Dimension mn.

Matrizen können auch mutlipliziert werden – allerdings nur, wenn sie zueinander "passen" – vgl. (). Passend ist beispielsweise das Produkt Ax worin A eine $m \times n$-Matrix und x ein Spaltenvektor des $\mathbb{R}^n$ – also eine $n \times 1$-Matrix x.

Auch passend ωA, worin ω eine $1 \times m$-Matrix, also ein m-komponentige Zahlenzeile, und A eine $m \times n$-Matrix. Das Resultat der Matrixmultiplikation ωA ist ein n-komponentige Zahlenzeile (eine Linearform auf V – aber sollte ich das hier erwähnen? Dualraum einführen?)

Weder Zahlenzeilen noch Zahlenspalten sind untereiander passfähig: nach den Regeln der Matrixmultiplikation kann man zwei Zahlenspalten, beide aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, nicht miteinander multiplizieren.

In jedem Fall untereinander passfähig sind quadratische Matrizen. Matrixmultiplikation ist auf $M(N \times n, \mathbb{R})$ assoziativ und bezüglich Addtion distributiv. Sie ist aber weder kommutativ, noch nullteilerfrei. Dazu ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

Das Produkt offenbart

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{8.3}$$

Weil hier das Produkt zweier von Null verschiedener Matrizen die Null-Matrix ergibt, sagt man Matrixmultiplikation sei nicht frei von Nullteilern (bei der gewöhnlichen Multiplikation impliziert $ab = 0$ entweder $a = 0$ oder $b = 0$). Vergleich mit dem Produkt

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB \tag{8.4}$$

liefert: Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Die Differenz der beiden Produkte ()

$$AB - BA =: [A, B] \tag{8.5}$$

nennt man den *Kommutator* von A und B. Unnötig darauf hinzuweisen, dass der Kommutator zweier $n \times n$-Matrizen eine $n \times n$-Matrix.

8.2 Rangsatz und elementare Umformungen

Hat man eine $m \times n$-Matrix A definiert die auch eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Unter dem Rang einer Matrix versteht man die Dimension des Bildraums der so zugeordneten linearen Abbildung. Da die n Spalten von A genau die Bilder der kanonischen Basisvektoren ist der Rang genau die Zahl der linear unabhängigen Spalten, genannt der Spaltenrang der Matrix A. Ebenso definiert die Dimension der linearen Hülle der Zeilen den Zeilenrang. Dabei gilt der wichtige

Satz (Rangsatz):

$$\mathrm{Rg}(A) := \mathrm{dimBild}(A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) = \mathrm{Spaltenrang}(A) = \mathrm{Zeilenrang}(A) \tag{8.6}$$

(Ohne Beweis)

Es gibt Matrizen, denen kann man den Rang direkt ansehen. Betrachte etwa

$$A = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^1{}_n \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^r{}_r & \cdots & a^r{}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

worin alle Hauptdiagonalelemente $a^r{}_r \neq 0$, so ist $\mathrm{Rg}(A) = r$ (denn es gibt r Zeilen verschieden von der 0-Zeile, und die sind linear unabhängig).

Wenn es also gelingt, eine gegebenen $m \times n$-Matrix A mittels "rangerhaltender" Umformungen in eine Matrix A' umzuformen, wobei A' von der Form (), wäre der Rang von A bestimmt

Man unterscheidet drei Typen elementarer Umformungen, die Zeilen einer Matrix betreffend

Vertauschung zweier Zeilen (8.8)

Multikpliktion einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ (8.9)

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (8.10)

Ebenso sind elementare Umformungen die Spalten betreffend formuliert.

Elementare Zeilenumformungen ändern die lineare Hülle der Zeilen nicht, insbesondere nicht deren Dimension, also den Zeilenrang, und daher wegen () auch nicht Rang der Matrix.

Elementare Umformungen gestatten ein einfaches Verfahren, den Rang einer Matrix zu bestimmen. Die Idee ist dabei, die Matrix mittels elementarer Umformungen auf die Gestalt () zu bringen. Solche Umformungen ändern ja den Rang der MAtrix nicht, und aus der Form () kann der Rang einfach abgelesen werden.

Zunächst stellt man – gegebenefalls duch Vertauschung von Zeilen oder Spalten – sicher, dass ${a^1}_1 \neq 0$. Dann addiert (bzw. subtrahiert) man geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den verbleibenden Zeilen, wobei das Vielfache so gewählt wird, dass ${a^i}_1 = 0$ für alle $i = 2, \ldots, m$. So mach man weiter bis man bei () landet.

Elementare Zeilenumfornungen sind aber noch in einem ganz anderen Kontext nützlich:

Satz: Erfüllen nämlich drei Matrizen A, B, C die Gleichung $C = BA$, und transformiert B und C durch simultan durchgeführte Zeilenumformungen in Matrizen B' und C', dann gilt $C' = B'A$.

Den Beweis überlassen wir den Übungen. Hier begnügen wir uns damit, die Früchte dieses Satzes zu ernten: Matrixinversion und Lösung linearer Gleichungssysteme.

8.3 Matrixinversion

$E = AA^{-1}$, transformiere A und E simultan mittels Zeilenumormungen, so dass $A \to A' = E$, dann ist $E \to A^{-1}$.

Beispiel (aus Jänich):

$$
\begin{array}{lcc}
\text{Start:} & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\
\begin{array}{l} \text{1. Schritt:} \\ (2) \to (2) - (1)\,, \\ (4) \to (4) - (1). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{2. Schritt:} \\ (3) \to (3) + (2). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{3. Schritt:} \\ (1) \to (1) - (3)\,, \\ (4) \to (4) + (3). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} \text{4. Schritt:} \\ (2) \to (2) + \frac{1}{2}(4)\,, \\ (3) \to (3) - \frac{1}{2}(4)\,, \\ (4) \to \frac{1}{2}(4). \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}
\end{array}
\tag{8.11}
$$

8.4 Lineare Gleichungssysteme

Sucht man die Nullstelle der Funktion $f(x) = ax - b$, gilt es die Gleichung $ax = b$ zu lösen. Solange man die Lösung noch nicht kennt, heißt x die *Unbekannte*. Kennt man die Lösung, sagt man $x_0 = \frac{a}{m}$ sei die Lösung der Gleichung $ax = b$.

Eine Gleichung der Form $ax = b$ nennt man eine *lineare Gleichung* in einer Unbekannten.[1] Entsprechend nennt man ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{cccc} a^1{}_1 x^1 & + \cdots + & a^1{}_n x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 x^1 & + \cdots + & a^m{}_n x^n & = & b^m \end{array} \tag{8.12}$$

ein *lineares Gleichungssystem* für die n Unbekannten r $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Sind alle b^i gleich Null, heißt das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Aufgefasst als linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liest sich () in der Form $Ax = b$. Für gegebene Gleichungsdaten (A, b) bilden diejenigen x, die $Ax = b$ erfüllen, die Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\} \tag{8.13}$$

Das Gleichungssystem () heißt *lösbar* falls Lös nicht leer; andernfalls heißt () unlösbar.

Klaro – das System $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild}(A)$. Sei nun x_0 eine Lösung von $Ax = b$, also $Ax_0 = b$, und h eine Lösung des homogenen Systems, also $Ah = o$, dann ist auch $x_0 + h$ mit $Ah = 0$ Lösung. Kurz,

$$\text{Lös}(A, b) = \{x_0 + h | Ax_0 = b\,, h \in \text{Kern}(A)\} \tag{8.14}$$

Offensichtlich ist ein lösbares Gleichungssystem in n Unbekannten genau dann eindeutig lösbar, wenn $\text{Kern}(A) = o$, wenn also $\text{Rang}(A) = n$. Hat man gar n Gleichungen in n Unbekannten, ist die Matrix A also quadratisch, so ist das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

[1] Die Funktion(!) $f(x) = ax - b$ ist aber keine lineare Funktion, sondern eine inhomogen lineare Funktion. Tja – Gleichung und Funktion sind halt verschiedene Typen, daher darf man die eine auch linear nennen und dieses Prdikat der anderen verweigern.

Cramer'sche Regel

Gauss'scher Algorithmus

Beispiel (nach Jänich)

$$
\begin{aligned}
-x^1 + 2x^2 + x^1 &= -2 && (8.15)\\
3x^1 - 8x^2 - 2x^3 &= 4 && (8.16)\\
x^1 + 4x^3 &= -2 && (8.17)
\end{aligned}
$$

Im ersten Schritt (2) $\rightarrow$ 3(1) + (2) und (3) $\rightarrow$ (1) + (3). Im zweiten Schritt (3) $\rightarrow$ (2) + (3) und fertig ist die Laube:

$$
x = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{8.18}
$$

8.5 Aufgaben

▷ **Aufgabe 8-1**

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \tag{8.19}
$$

Bestimmen Sie den Rang von A.

▷ **Aufgabe 8-2**

Gegeben ein lineares Gleichungssystem in drei Unbekannten x, y, z

$$x + 3y + 3z = 3\,, \tag{8.20}$$

$$2x + 2y + 4z = 1\,, \tag{8.21}$$

$$3x + y + 2z = 2\,. \tag{8.22}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus die Lösungsmenge des Systems.

▷ Aufgabe 8-3

Gegeben eine 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{8.23}$$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} mittels elementarer Matrixumformungen.

▷ Aufgabe 8-4

Gegeben eine Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

(a) Ist die Abbildung $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ orientierungserhaltend? Normerhaltend? Gar eine Drehung?

(b) Skizzieren Sie das Bild der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter R.

▷ **Aufgabe 8-5**

Sei V Vektorraum (etwa $V \simeq \mathbb{R}^3$), und $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ Abbildung von V auf V,

$$\mathcal{T}_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}\,, \tag{8.25}$$

mit $\vec{a} \in V$ fest.

(a) Die Abbildung läuft auch unter dem Begriff *Translation* (bzw. Verschiebung). Warum wohl?

(b) Ist $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ eine lineare Abbildung?

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{\mathcal{T}_{\vec{a}} | \vec{a} \in V\}$ versehen mit der Verknüpfung $\mathcal{T}_{\vec{a}} \circ \mathcal{T}_{\vec{b}} = \mathcal{T}_{\vec{a}+\vec{b}}$ bildet eine Gruppe, in Fachkreisen genannt *Translationsgruppe*. Ist die Gruppe abelsch? Was wäre das Neutralelement? Was wäre das zu $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ inverse Element?

