

Kapitel 12

Elemente der Integralrechnung

Hat man eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, worin D irgendein Intervall, kann man sich für die Fläche interessieren, die “zwischen Funktionsgraph und X -Achse” liegt, von links und rechts von den Grenzen eines Intervalls $[a, b] \subset D$ begrenzt wird, und mit positivem (negativem) Vorzeichen verbucht wird, wenn der Funktionsgraph oberhalb (unterhalb) der X -Achse verläuft. Der mathematische Begriff für diesen “orientierten” Flächeninhalt ist das *Integral*

$$\int_a^b dx f(x), \quad (12.1)$$

wenn es denn existiert (=einen endlichen Wert hat) – die Funktion f also über $[a, b] \subset D$ “integrierbar” ist.

Die “elementarste Fläche” die man sich vorstellen kann ist die Fläche eines Recht-

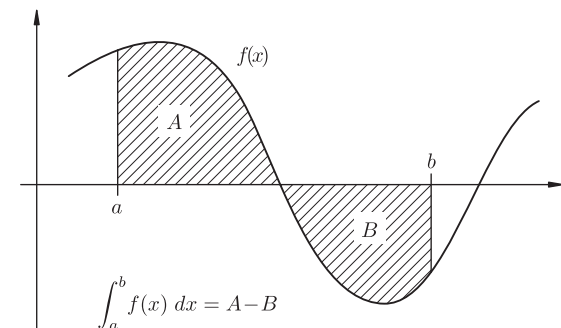


Abb 12.1 Geometrische Deutung des Integrals.

ecks, und so steht am Anfang der Integralrechnung die Definition

$$\int_a^b dx c := (b - a)c \quad (12.2)$$

lies: das Integral der konstanten Funktion $f(x) = c$ über dem Intervall $[a, b]$ hat den Wert $(b - a)c$.

12.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Um die Fläche für eine allgemeine Funktion einzugrenzen, nimmt man die Funktion “in die Zange”.¹ Man unterteilt das Integrationsintervall

$$a := x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := b, \quad (12.3)$$

und wählt für jedes Subintervall $[x_{i-1}, x_i]$

$$k_i \leq f(x) \leq h_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (12.4)$$

Die Unterteilung (12.3) zusammen mit den Begrenzungen (12.4) bilden die Daten einer Zange Z für die Funktion f . Der orientierte Flächeninhalt der unteren (oberen) Greifbacke der Zange heißt die *Untersumme* (*Obersumme*) der Zange,

$$U(Z) := \sum_i k_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad O(Z) := \sum_i h_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad (12.5)$$

¹aus: Jänich *Mathematik 1*, S. 41– 60. Gegenüber dem üblichen Vorgehen, bei dem die zu integrierende Funktion durch Treppenfunktionen von oben bzw. unten approximiert wird, kann bei Verwendung von Zangen auf die Diskussion der Approximation von stetigen Funktionen durch Folgen unstetiger Funktionen (Treppenfunktionen) verzichtet werden.

und die Differenz

$$O(Z) - U(Z) = \sum_i (h_i - k_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (12.6)$$

heißt die *Toleranz* der Zange Z .

Definition “Riemann-integrierbar”: Eine Funktion heißt *Riemann-integrierbar* wenn sie beschränkt ist und sich zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zange Z um f mit einer Toleranz $O(Z) - U(Z) < \varepsilon$ angeben läßt.

Ist f Riemann-integrierbar, so gibt es genau eine Zahl I für die $U(Z) \leq I \leq O(Z)$ für alle Zangen, in die f genommen werden kann, und diese Zahl heißt das Integral von f über $[a, b]$, notiert

$$\int_a^b dx f(x) \quad (12.7)$$

(Beweis: Jänich *Mathematik 1*, S. 519–520).

Jede beschränkte Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar und es gelten die Rechenregeln

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (12.8)$$

$$\int_a^b dx (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \quad (12.9)$$

$$\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) \quad (12.10)$$

Regel (12.8) berücksichtigt die Orientierung beim Umlaufen von Flächen; Regel (12.9) besagt, dass Integration eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen, und Regel (12.10) sagt, dass Flächen additiv sind.

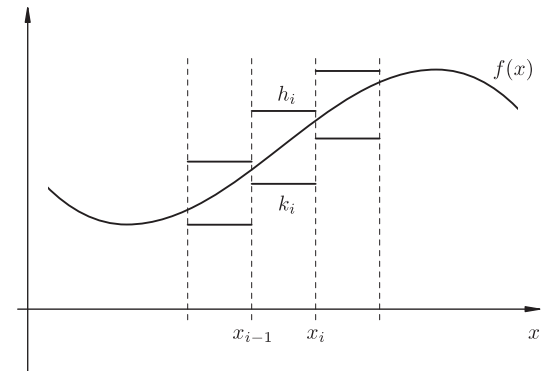


Abb 12.2 Eine Funktion in der Zange.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in D$ gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x dt f(t) = f(x) \quad (12.11)$$

auf ganz D .

Der Beweis beruht auf der Regel (12.10) und ist ansonsten einfach zu führen. Man beachte, dass die linke Seite von der unteren Integrationsgrenze abhängt, die rechte Seite aber nicht.

Definition (Stammfunktion): Eine differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ stetig heißt *Stammfunktion* von f .

Offensichtlich ist mit F auch $F + c$ Stammfunktion (denn die Ableitung der konstanten Funktion c ist Null).

Hat man eine Stammfunktion gefunden, kennt man alle (man muss zu seinem Fund nur eine irgendwie gewählte Konstante hinzufügen).

Mittels Stammfunktion schreibt sich ein bestimmtes Integral

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b. \quad (12.12)$$

was etwas missverständlich anmutet, taucht doch im Ausdruck ganz rechts auch wieder der Name der Integrationsvariablen auf

Wenn man hier die obere Grenze als variabel auffasst, würde man pedantisch notieren $\int_a^x dt f(t) = F(x) - F(a)$. In Integraltafeln oder ähnlichen Formelwerken verzichtet man auf Pedantik, lässt die untere Integrationsgrenze unbenannt, und lässt

$F(a)$ unter den Tisch fallen. Mit dieser Konvention die Notation betreffend lassen sich mit Blick auf $(\)-(\)$ die Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen leicht angeben,

$$\int^x dt t^s = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \quad (12.13)$$

$$\int^x dt e^{\kappa t} = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa x} \quad (12.14)$$

$$\int^x dt \sin(kt) = -\frac{1}{k} \cos(kx) \quad (12.15)$$

$$\int^x dt \cos(kt) = \frac{1}{k} \sin(kx) \quad (12.16)$$

Ist $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $0 < \varepsilon < b - a$ über $[a + \varepsilon, b]$ integrierbar, so heißt der Grenzwert

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b dx f(x) \quad (12.17)$$

das *uneigentliche* Integral von f über $]a, b]$. Für Funktionen, die über ganz \mathbb{R} definiert sind, heißt entsprechend $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b dx f(x)$ das *uneigentliche Integral* von f über \mathbb{R} .

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf $[0, 1]$ nicht Riemann-integrierbar (da für $x \rightarrow 0$ nicht beschränkt). Allerdings existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}}$, denn

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x} \Big|_a^b = 2 (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (12.18)$$

und also $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Beim Ausrechnen von Integralen sind zwei Techniken von hervorragender Bedeutung, genannt *partielle Integration* und *Substitution*. Die *partielle Integration* basiert auf der Identität $(fg)' = f'g + g'f$, umgestellt $f'g = (fg)' - fg'$, integriert

$$\int_a^b dx f'(x)g(x) = \int_a^b dx (fg)'(x) - \int_a^b dx f(x)g'(x) \quad (12.19)$$

$$= fg|_a^b - \int_a^b dx f(x)g'(x) \quad (12.20)$$

auch treffend genannt “Abwälzen der Ableitung”.

Bei der Technik der Substitution wird die Integrationsvariable als abhängige Variable einer geschickt gewählten Funktion aufgefasst, $x = \phi(t)$, und man schreibt

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad (12.21)$$

12.2 Aufgaben

▷ Aufgabe 12-1

Gegeben eine Funktion

$$f(x) := \frac{1}{(x-a)(x-b)} \quad (12.22)$$

- (a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. Wo erwarten Sie Probleme?
- (b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von f für die drei Intervalle $x < a$, $a < x < b$ und $b < x$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung könnte sich bei (b) nützlich erweisen ...

▷ **Aufgabe 12-2**

Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\int dx x \sin(x^2 - 1), \quad \int dx x \ln x. \quad (12.23)$$

▷ **Aufgabe 12-3**

Man beweise, dass mit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|$ (Betrag von f) Riemann-integrierbar, und

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int dx |f(x)|. \quad (12.24)$$

