Kapitel 13

Taylorentwicklung

13.1 Motivation

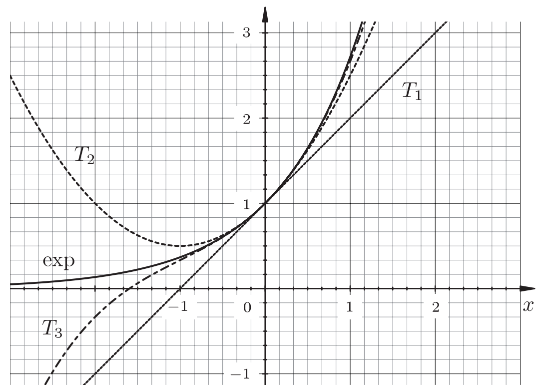

Abb 13.1 *Die Exponentialfunktion und ihre Taylorpolynome der Grade 1,2,3.*

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen. Sie erinnern sich: Eine in $a \in D$ stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird durch die lineare Funktion $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ in einer Umgebung von a in erster Ordnung approximiert, d.h. $f(a) = g(a)$ und $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$. Schon Brook Taylor (1685–1731), ein Schüler Newtons, hat gezeigt, dass diese Approximation verbessert werden kann, wenn man zur Approximation Polynome höherer Ordnung verwendet. Ein Blick auf die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, Gl. (10.16), beispielsweise genügt, um sich zu überzeugen, dass das Polynom zweiter Ordnung $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ die Exponentialfunktion in der Umgebung von $x = 0$ "besser" approximiert als das Polynom erster Ordnung $T_1(x) = 1 + x$: das Polynom T_2 berücksichtigt auch die "Krümmung" der Exponentialfunktion bei $x = 0$.

13.2 Taylorpolynom

Ausgangspunkt ist der Hauptsatz der Integralrechnung (12.11)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{13.1}$$

Den Integranden kann man reformulieren $f' = gh'$, mit $g = f'$ und $h(t) = (t - x)$. N-malige Anwendung der partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t)dt \\ &= f(a) + f'(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt \\ &= \ldots \\ &= f(a) + f'(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + f^{(N)}(a)\frac{(x-a)^N}{N!} + R_N(x,a)\,, \end{aligned} \tag{13.2}$$

mit $R_N(x,a)$ das sog. *Restglied*,

$$R_N(x,a) := \int_a^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt\,. \tag{13.3}$$

Das hier auftretende Polynom N-ten Grades

$$T_N f(x,a) := \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k \tag{13.4}$$

heißt das N-te *Taylorpolynom* von f für den Entwicklungspunkt a.

Ist $f^{(N+1)}$ auf D beschränkt, $|f^{(N+1)}(t)| \leq C_N$, läßt sich das Restglied abschätzen

$$|R_N(x,a)| \leq C_N \int_a^x \frac{(x-t)^N}{N!} dt = C_N \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!}\,. \tag{13.5}$$

In diesem Falle

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_N f(x,a)}{(x-a)^N} = 0\,. \tag{13.6}$$

Man sagt dann $T_N f(x,a)$ approximiere die Funktion f bei a von N-ter Ordnung, mit Landau's o-Symbol notiert

$$f(x) = T_N f(x,a) + o(|x-a|^N)\,. \tag{13.7}$$

Von allen Polynomen N-ten Grades ist das Taylorpolynom $T_N f$ dadurch ausgezeichnet, dass es eine gegebene Funktion $\mathcal{C}^N$-Funktion f in N-ter Ordnung approximiert, d.h. die Abweichung $f - T_N f$ geht selbst nach Division durch $(x-a)^N$ noch gegen Null.

13.3 Taylorreihe

Sofern die Folge der C_N im Limes $N \to \infty$ gar konvergiert, wird das Restglied beliebig klein, und () wird zu $f(x) = Tf(x,a)$ bzw.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,. \tag{13.8}$$

kurz: die Funktion f stimmt mit ihrer Taylorreihe überein.

Für $N \to \infty$ wird aus dem Taylorpolynom die unendliche Reihe,

$$Tf(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n\,. \tag{13.9}$$

genannt die *Taylorreihe* von f bei a.

Wenngleich in der Praxis eine Funktion und ihre Taylorreihe indentifiziert werden dürfen, gibt es durchaus Ausnahmen wo entweder

Konvergenzradius einer Potenzreihe: die größte Zahl r für welche die Potenzreihe für alle x mit $|x-a| < r$ konvergiert, $r = \sup\{|x-a| | \sum c_n(x-a)^n < \infty\}$.

Konvergenzbereich einer Funktionenfolge: Größtmögliche Menge von Punkten im Definitionsbereich, in denen die Funktionenreihe punktweise konvergiert.

13.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 13-1**

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zum Entwicklungspunkt 0. Konvergenzradius? Vergleich mit der geometrischen Reihe?

▷ **Aufgabe 13-2**

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ zum Entwicklungspunkt 0. Was ist der Konvergenzradius der Reihe? Skizzieren sie die Graphen der Funktion und ihrer ersten 3 Taylorpolynome.

▷ **Aufgabe 13-3**

Zeigen Sie: Die Taylorreihe des natürlichen Logarithmus mit Entwicklungspunkt 1 hat Konvergenzradius 1 und ist gegeben

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\,, \qquad -1 < x < 1\,. \tag{13.10}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen des natürlichen Logarithmus, die ersten 3 Taylorpolynome, und das Taylorpolynom 10-ter Ordnung (Wenn's gar nicht anders geht – Computerunterstützt). Wird der Konvergenzradius in ihrer Skizze sinnfällig?

▷ Aufgabe 13-4

Für die Schwingungsperiode eines physikalischen Pendels der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) als Funktion der Amplitude A gilt

$$T(A) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} \tag{13.11}$$

wobei $\alpha = \sin(A/2)$. Man berechne das Integeral näherungsweise für kleine A bis zur vierten Ordnung in A und skizziere in dieser Näherung $T(A)$.

▷ Aufgabe 13-5

Beweisen Sie die *Restgliedformel* von Lagrange: Für eine $\mathcal{C}^{N+1}$-Funktion f auf einem offenen allgemeinen Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ gibt es für jedes $x \in D$ eine Stelle ξ_x zwischen a und x, so dass sich das Restglied R_N der Taylorentwicklung von f darstellen lässt

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\,. \tag{13.12}$$

<u>Hinweis:</u> Nehmen Sie die Taylor'sche Restgliedformel als Ausgangspunkt, schätzen mittels minimalem und maximalem Funktionswerten von f auf dem Integrationsintervall $[a, x]$ (bzw. $[x, a]$) das Restglied nach unten und oben ab, und rufen einen Mittelwertsatz auf: Für f stetig auf $[a, b]$ gibt es zu jedem y zwischen dem globalen Minimum und dem globalen Maximum von f ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$.