Kapitel 14

Fourierentwicklung

Ein Taylorpolynom N-ter Ordnung vermittelt die *lokale* Approximation einer Funktion – die Differenz $f(x) - T_N f(x,a)$ ist umso kleiner, die Approximation umso besser, je näher x dem Entwicklungspukt a – vgl. Abbildung 13.1. Global ist die Näherung nicht gut – schließlich geht so ein Taylorpolynom N-ter Ordnung für genügend große Entfernung vom Entwicklungspunkt nach $\pm\infty$, was insbesondere für beschränkte Funktionen eine mehr als schlechte Näherung darstellt.[1]

Komplementär dazu die nun vorzustellende Fourierapproximation: hier sucht man eine Funktion global zu approximieren, also so, dass die Abweichung ingesamt möglichst klein wird wobei man in niedrigen Ordnungen, was die lokale Genauigkeit betrifft, ein Auge zudrückt. Fourierapproximationen sind insbesondere bei periodischen Funktionen beliebt, führen sie doch schon in niedrigen Ordnungen zu recht brauchbaren Ergebnissen – vgl. die nebenstehende Abbildung 14.1.

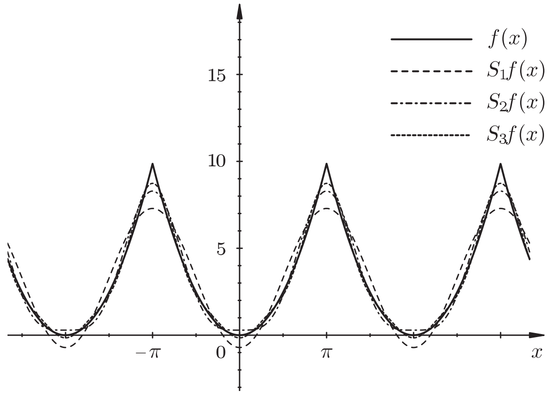

Abb 14.1 *Eine 2π-periodische Funktion, auf dem Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ definiert $f(x) = x^2$, nebst ihren approximierenden Fourierpolynomen vom Grade $1, 2$ und 3, vgl. Gl. (14.29).*

[1] Macht “mehr als schlecht” Sinn?

14.1 Fourierpoynome und Besselsche Approximation

Die (komplexwertige) Funktion

$$T_N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\,, \qquad c_n \in \mathbb{C}\,, \tag{14.1}$$

heißt ein *trigonometrisches Polynom* N-ten Grades.[2]

Ist ein trigonometrisches Polynom T_N gegeben, lassen sich die Koeffizienten c_n leicht berechnen,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} T_N(x) e^{-inx} dx\,. \tag{14.2}$$

Zum Beweis muss lediglich ein elementares Integral berechnet werden,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-n)x} dx = \delta_{mn}\,. \tag{14.3}$$

Hier ist δ_{mn} Kronecker's Symbol, $\delta_{mn} = 1$ falls $m = n$ und $\delta_{mn} = 0$ falls $m \neq n$.

Die T_N sind offensichtlich 2π-periodische Funktionen, $T_N(x) = T_N(x+2\pi)$, stetig und differenzierbar. Wozu sind sie gut? Zur Approximation von periodischen Funktionen!

Sei also f eine periodische Funktion, $f(x) = f(x + 2\pi)$, von der wir zunächt nur voraussetzen sie möge auf ihrem Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ integrabel sein. Für solche Funktionen heißt die (endliche) Reihe

$$S_N f := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n e^{inx}\,, \qquad \tilde{f}_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \tag{14.4}$$

[2] Achtung – In diesem Kapitel wird mit T_N eine trignometrisches Polynom bezeichnet, kein Taylorpolynom!

das *Fourierpolynom* N-ten Grades von f.

Das Fourierpolynom $S_N f$ ist natürlich ein trigonometrisches Polynom, und zwar genau dasjenige welches das Fehlerintegral

$$d(f, T_N) := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_N(x)|^2 \, dx \tag{14.5}$$

bezüglich aller trigonometrischen Polynome N-ten Grades minimiert

$$d(f, T_N) \quad \text{minimal} \quad \Leftrightarrow T_N = S_N f\,. \tag{14.6}$$

Der Beweis ist schnell erbracht

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_N(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |T_N(x)|^2 \, dx \tag{14.7}$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) T_N(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} T_N^*(x) f(x) dx \tag{14.8}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx + \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \tag{14.9}$$

$$- \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n^* c_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n^* \tilde{f}_n \tag{14.10}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=-N}^{N} \left| \tilde{f}_n \right|^2 \tag{14.11}$$

$$+ \sum_{n=-N}^{N} \left| \tilde{f}_n - c_n \right|^2 \tag{14.12}$$

was mit der Wahl $c_n = \tilde{f}_n$ offensichtlich minimal wird.

Wird also eine Funktion f durch ihr Fourierpolynom $S_N f$ approximiert, beträgt der Fehler im quadratischen Mittel

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=-N}^{N} \left|\tilde{f}_n\right|^2 . \tag{14.13}$$

Da in jedem Fall $\left|\tilde{f}_n\right|^2 \geq 0$, und da die Werte der $\tilde{f}_n$ wegen der Orthogonalitätsrelation (14.3) endgültig sind, also vom Grad der Näherung N gar nicht abhängen, sieht man sofort, dass der Fehler mit wachsendem N kleiner wird, zumindest aber nicht anwächst. Im übrigen lesen wir hier ab

$$\sum_n |\tilde{f}_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \tag{14.14}$$

sog *Bessel'sche Ungleichung*. Dass hier – von pathologischen Fällen abgesehen – sogar Gleichheit herrscht wird weiter unten, Stichwort *Parseval'sche Gleichung*, demonstriert.

Die Bessel'sche Ungleichung besagt, dass die $|\tilde{f}_n|^2$ eine Nullfolge bilden. Das geht aber nur wenn auch die $\tilde{f}_n$ eine Nullfolge bilden. In Rückbesinnung auf die Definition der $\tilde{f}_n$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \,, \tag{14.15}$$

sog *Riemann'sches Lemma.*

14.2 Fourierreihen

In der Tat ist es sogar so, dass für die meisten Funktionen, einschließlich solcher mit endlich vielen Knicken und/oder Sprungstellen, $\lim_{N\to\infty} d(f, S_N f) = 0$, was zuweilen (also meist) auch etwas lax so geschrieben wird

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \tilde{f}_n e^{inx}\,, \qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx\,. \tag{14.16}$$

Die rechte Seite heißt *Fourierreihe* der Funktion f. Die Gleichheit von f und Reihe bedeutet dabei punktweise Gleichheit "fast überall", also bis auf eine abzählbare Punktmenge vom Maß null. Für stetige Funktionen sogar punktweise "überall". In jedem Fall aber "Konvergenz im quadratischen Mittel", also $\lim_{N\to\infty} d(f, S_N f) = 0$.

Zum Beweis dieser Aussage, die unten noch einmal in drei Sätzen präzisiert wird, benutzen wir die Identität

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x - x') f(x') dx' \tag{14.17}$$

mit D_N sog *Dirichletkern*

$$D_N(x - x') := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-x')}\,. \tag{14.18}$$

Ans Werk. Auch der Dirichletkern ist ein trigonometrischen Polynom, allerdings ein besonders einfaches: alle Koeffizienten sind gleich. Bevor Sie hier Ihre Formelsmmlung bemühen um die Reihe in eine geschlosse Form zu bringen, setzen wir abkürzend $\tau := x - x'$, vergewissern uns $e^{in\tau} = (e^{i\tau})^n$, setzen abkürzend $q := e^{in\tau}$, und rufen unser Schulwissen auf: $(1+q+q^2+\ldots+q^m)(1-q) = 1-q^{m+1}$ bzw $\sum_{n=0} mq^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$, die Formel für die endliche geometrische Reihe. Damit ausgerüstet könnten Sie jetzt die folgenden Zeilen einfach selber hinschreiben,

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} = \frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\sum_{n=0}^{2N} e^{in\tau} \tag{14.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\frac{1-e^{i(2N+1)\tau}}{1-e^{i\tau}} \tag{14.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\tau}-e^{i(N+\frac{1}{2})\tau}}{e^{-i\frac{1}{2}\tau}-e^{i\frac{1}{2}\tau}} \tag{14.21}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \tag{14.22}$$

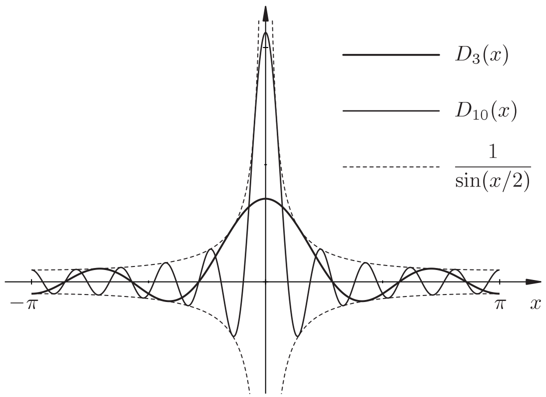

Abb 14.2 *Die Dirichletkerne der Ordnungen* 3 *und* 10.

Macht man sich ein Bild von $D_N(\tau)$ schaut man – für große N – auf ein bei $\tau = 0$ konzentriertes wild oszillierendes Monster mit langsamem Abfall nach den Seiten.

Ein flüchtiger Blick auf die Definition (**??**) des Dirichletkerns genügt, um sich von $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-x')dx' = 1$ bzw

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} = 1 \tag{14.23}$$

zu überzeugen.

Für das weitere nehmen wir in (14.17) eine lineare Transformation der Integrationsvariablen vor, $x' \mapsto \tau := x - x'$. Auf die Transformation der Grenzen kann Dank der 2π-Periodizität des Integranden verzichtet werden, und nach Abzug einer

Konstanten $f(x)$ auf beiden Seiten der Gleichung schauen wir auf

$$(S_N f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\underbrace{f(x-\tau)-f(x)}_{:=g(\tau)}\right)\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)}d\tau \tag{14.24}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{g(\tau)\frac{\cos\frac{1}{2}\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau}}_{:=h(\tau)}\sin N\tau d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\cos N\tau d\tau \tag{14.25}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\tau)e^{iN\tau}d\tau \tag{14.26}$$

worin ϕ Hilfsfunktion

$$\phi := \frac{g(\tau)+g(-\tau)}{2} + \frac{h(\tau)-h(-\tau)}{2i} \tag{14.27}$$

$$= \tag{14.28}$$

Sofern nur der Differenzquotient $\tau \mapsto \frac{f(x-\tau)-f(x)}{\tau}, \tau \neq 0$ beschränkt, ist ϕ beschränkt mit allenfalls endlich vielen Unstetigkeitsstellen (die es von f erbt). Für diesen Fall kann das Riemann'sche Lemma (14.15) eingesetz werden womit der folgende Satz bereits bewiesen wäre.

Satz 1 Sei f eine beschränkte 2π periodische Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Periodenintervall $[-\pi,\pi]$, und sei x_0 eine Stelle, für die der Differenzquotient $\tau \mapsto (f(x_0+\tau) - f(x_0))/\tau, \tau \neq 0$ beschränkt ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an dieser Stelle gegen den Funktionswert.

Ein schöne Anwendung dieses Satzes findet sich für das Beispiel $f : x \mapsto x^2$ auf dem Intervall $]-\pi,\pi]$. Die periodische Fortsetzung der Funktion ist eine stückweise stetige

Funktion mit Knicken bei $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ – vgl. Abbildung 14.1. Der Differenzenquotient ist aber bei jedem dieser Knicke beschränkt, $|f(x_0+\tau) - f(x_0)| \le C|\tau|$, im vorliegenden Fall $C = 2\pi$. Satz 1 ist also anwendbar, die Fourierreihe $S_N f$ konvergiert für $N \to \infty$ punktweise gegen x^2, mit Fug und Recht also (Beweis: Übung)

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,. \tag{14.29}$$

Das ist ganz pfiffig, denn setzt man hier einfach $x = \pi$ und $x = 0$ erhält man nicht-triviale Aussagen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{14.30}$$

Neben den geknickten Funktionen spielen aber insbesondere auch Funktionen mit Sprungstellen für die Anwendungen eine wichtige Rolle, denken Sie nur an ein Telegraphen- oder Morsesignal. An einer Sprungstelle von f, sagen wir x_0, ist die Voraussetzung des beschränkten Differenzquotienten aber nicht erfüllt.

Besonders wichtig sind Sprungstellen für die die neben der Existenz der halbseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) := f_\pm(x_0)$ auch die Existenz der halbseitigen Differenzquotienten gewährleistet ist. Für den Funktionswert an der Sprungstelle selbst setzen wir den Mittelwert $f(x_0) := (f_+(x_0) + f_-(x_0))/2$. Diese Änderung hat unter dem Schutz des Integrals keinen Einfluss auf die Fourierkoeffizienten. Einen Sprung mit diesen Eigenschaften nennt man auch gern einen *sauberen Sprung* bzw *Unstetigkeitsstelle erster Art.*

Für zwei Funktionen f, g die beide bei x_0 einen sauberen Sprung derselben Höhe hinlegen, ist die Differenzfunktion $f - g$ bei x_0 stetig und hat beschränkten Differenzquotienten! Ihre Fourierreihen konvergieren also nach Satz 1 bei x_0 gegen den

Funktionswert $f(x_0) - g(x_0)$. Die Moral hier ist dass man zu gegebenem x_0 nur ein einziges Beispiel einer bei x_0 sauber springenden Funktion g zu finden braucht, deren Fourierreihe bei x_0 gegen den Funktionswert $g(x_0)$ konvergiert, um zu wissen, dass das für alle bei x_0 sauber springenden f gilt. Formuliert als

Satz Sei f eine beschränkte 2π periodische Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$, und sei x eine Stelle, an der die halbseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) := f_\pm(x_0)$ existieren und die halbseitigen Differenzquotienten beschränkt sind. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an dieser Stelle gegen den Mittelwert $(f_+(x_0) - f_-(x_0))/2$.

Der Beweis bedarf wie schon gesagt nur eines einzigen Beispiels, und da wählen wir halt die bei x_0 springende Stufenfunktion mit $g(x_0 + \tau) = -g(x_0 + \tau)$. Zu zeigen bleibt, dass deren Fourierreihe sich im Punkt x_0 zu Null berechnet. Ruft man sich hier die Dirichletdarstellung für die N-te Partialsumme in Erinnerung, $(S_N g)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x_0 + \tau) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}$, und beachtet dass g ungerade, der Dirichletkern aber gerade, bestätigt sich $(S_N g)(x_0) = 0$ wie erhofft.

Sätze 1 und 2 werden gerne zu einem Satz zusammengefasst, dem *Satz von Dirichlet*, und die Bedingungen, die an die Funktionen f gestellt werden, heißen *Dirichlet'sche Bedingungen*. Die Dirichlet'schen Bedinungen sind (offensichtlich) hinreichend für die genannten Konvergenzeigenschaften, sie sind aber nicht notwendig.

Satz Sei f eine 2π periodische Funktion, quadratintegrabel über dem Periodenintervall, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die *Parseval'sche Gleichung*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_n |\tilde{f}_n|^2 \tag{14.31}$$

Die behauptete Konvergenz ist hier also nicht punktweise, sondern eben nur im quadratischen Mittel. Limesfunktion $S_N f$ und f können sich durchaus auf einer, allerdings nicht messbaren Punktmenge, unterscheiden.

Für stetige Funktionen, die den Dirichletbedingungen aus Satz 1 genügen, ist das offensichtlich. In diesem Falle gilt ja punktweise Konvergenz, $\lim_{N\to\infty}(S_N f)(x) = f(x)$, trivialerweise $\lim_{N\to\infty} d(f, S_N f) = 0$, und also () wie behauptet.

Für Funktionen mit einer endlichen Zahl von sauberen Sprüngen konvergiert $S_N f$ zwar nicht mehr punktweise, die Abweichungen sind im Limes $N \to \infty$ auf eine endliche Punktmenge vom Maß Null beschränkt, was unter dem Schutz des Integrals allerdings nicht zum Tragen kommt. Auch für solche Funktionen trifft Satz 3 also zu.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Beweis für Funktionen die zwar quadratintegrabel, aber mit möglicherweise unbeschränktem Differenzquotienten daher kommen, zb $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$, $x \in [-\pi, \pi]$, eine Funktion deren links- wie rechtsseite Ableitung für $x \to 0_\pm$ unbeschränkt. Die Mathematik, die wir hier nicht darstellen können, lehrt dass auch für solche Funktionen Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel gesichert ist, und die Parseval'sche Gleichung gilt.

14.3 Aufgaben

▷ **Aufgabe 14-1**

Der Dirichletkern, daran sei erinnert, ist definiert

$$D_N(x - x') := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-x')} \,. \tag{14.32}$$

(a) Beweisen Sie

$$D_N(x-x') = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}](x-x')\right)}{\sin(\frac{1}{2}(x-x'))} \tag{14.33}$$

und skizzieren Sie Funktionsgraphen für für festes x' und $N = 1, 2, 10$. Wie würden Sie die Funktion $D_N(x-x')$ für große N in wenigen Worten charakterisieren? Hinweis: Der Dirichletkern ist ein trigonometrischen Polynom, allerdings ein besonders einfaches: alle Koeffizienten sind gleich. Bevor Sie hier Ihre Formelsmmlung bemühen um die Reihe in eine geschlosse Form zu bringen, setzen Sie abkürzend $\tau := x - x'$, vergewissern sich $e^{in\tau} = (e^{i\tau})^n$, setzen abkürzend $q := e^{in\tau}$, und rufen ihre Kenntnisse die geometrische Reihe betreffend auf: $(1 + q + q^2 + \ldots + q^m)(1-q) = 1 - q^{m+1}$ bzw $\sum_{n=0} mq^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$, die Formel für die endliche geometrische Reihe. Damit ausgerüstet sollten Sie den Beweis führen Können . . . . Ach ja – und dass die Summe bei $-N$ los geht sollte Sie nicht irritieren. Schreiben Sie doch einfach $q^n = q^{-N}q^{n+N}$, und dann geht doch die Summe über $n + N$ bei Null los . . .

(b) Beweisen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} = 1 \tag{14.34}$$

Hinweis: Benutzen Sie doch einfach die Definition (14.32) und integrieren die rechte Seite gliedweise . . . .