Kapitel 15

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Schaut man sich in der Physik um, stellt man fest, dass die viele Prinzipien und Naturgesetze in Form sog. *Differentialgleichungen* (kurz: DGL) formuliert werden. Das schon aus der Schulzeit bekannte 'eff-gleich-em-mal-ahh" bzw. "em-mal-ahh-gleich-eff", beispielsweise, notiert die Physikerin nach Identifikation der momentanen Beschleunigung $a(t)$ mit der momentanen Änderung der Geschwindigkeit, $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$, der momentanen Geschwindigkeit $v(t)$ mit der zeitlichen Änderung der Ortes, $v(t) = \frac{d}{dt}q(t)$, für vorgegebene Abhängigkeit der Kraft F vom Ort q, möglicherweise der Geschwindigkeit v und der Zeit t, ausführlich

$$m\frac{d^2}{dt^2}q(t) = F\left(q(t), \frac{d}{dt}q(t), t\right) , \tag{15.1}$$

genannt die *Newton'sche Bewegungsgleichung des Massepunktes.*[1] Weil hier außer der Koordinate q auch deren Ableitungen eingehen, ist die Newton'sche Bewegungsgleichung vom mathematischen Standpunkt eine Differentialgleichung, genauer eine *(gewöhnliche) Differentialgleichung zweiter Ordnung* – die höchst Ableitung ist schließlich von zweiter Ordnung.[2] Das Problem, dem sich die Physikerin dann in Anwendung des Naturgesetzes auf eine konkrete Situation konfrontiert sieht, ist eine Funktion $q(t)$ zu finden die einerseits die DGL () befriedigt, die andererseits für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 gewissen vorgegebenen Bedingungen, sog. *Anfangsbedingungen* genügt. In der Theorie der Differentialgleichungen wird geklärt, welcherart Lösungen eine gegebene DGL zulässt, und für welcher Art Anfangsbedingungen das AWP für diese DGL eindeutig lösbar. Für die Newton'sche Bewegungsgleichung, beispielsweise, erweist sich das AWP bei Vorgabe der Anfangslage $q_0 \equiv q(t_0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \equiv \frac{d}{dt}q(t_0)$ als eindeutig lösbar. Das physikalische Prinzip, wonach der Zustand eines Massepunkte zu jedem beliebigen Zeitpunkt durch Angabe seines Ortes und seiner Geschwindigkeit bereits vollständig festgelegt ist, findet hier seine mathematische Formulierung.

[1]Das Prädikat "Newton'sch" bezieht sich dabei auf den Umstand, dass die Funktion F auf der rechten Seite lediglich eine Funktion der Koordinate q, eventuell der Geschwindigkeit $\dot{q}$ und der Zeit, nicht aber von höheren Ableitungen abhängt.

[2]Das Prädikat "gewöhnlich" bezieht sich dabei auf die Unterscheidung zu den sog. *partiellen Differentialgleichungen*, bei denen die Funktion (hier: q) von mehreren unabhängigen Variablen abhängt, und die Differentialgleichung neben der Funktion selber auch deren Ableitungen nach diesen unabhängigen Variablen involviert. Partielle DGL (kurz PDGL) lernen Sie im Sommersemeser kennen. Hier beschränken wir uns auf die gewöhnlichen DGL.

15.1 Lineare Differentialgleichungen

Mit einem Auge auf die Physik setzen wir abkürzend $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$ etc bzw. allgemein $q^{(n)}$ für die $n$te Ableitung nach der unabhängigen Variable t. [3]

Grundsätzlich unterscheidet man lineare und nichtlineare Differentialgleichungen. Unter einer nichtlinearen DGL versteht man eine Differentialgleichung in der die gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen in einer höheren als ersten Potenz erscheinen. Beispielsweise ist $\dot{q} = q^2$ eine nichtlineare DGL. Von wenigen – nichtdestotrotz wichtigen – Ausnahmen abgesehen gibt es keine allgemeine Lösungstheorie nichtlinearer DGL.

Unter einer *linearen Differentialgleichung nter Ordnung* versteht man ein Gleichung der Form

$$\text{(L)} \qquad q^{(n)} + a_{n-1}q^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{q} + a_0 q = g(t) \tag{15.2}$$

worin $a_0 \ldots, a_{n-1}$ und g gegebene, stetige komplexe (oder reelle) Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Funktion g nennt man die *Inhomogenität* der DGL (15.2), und eine Gleichung der Form

$$\text{(H)} \qquad q^{(n)} + a_{n-1}q^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{q} + a_0 q = 0 \tag{15.3}$$

die zu (15.2) geörige *homogene* Gleichung. Achtung: der Buchstabe q fungiert hier lediglich als Platzhalter, in () steht er für eine Funktion, die die DGL () befriedigt, und in () für eine Funktion, die die DGL () befriedigt, wobei die beiden genannten Funktionen sich i.A. durchaus unterscheiden.

Unter einer Lösung der linearen DGL (15.2) versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion $I \to \mathbb{C}$ (oder $I \to \mathbb{R}$), die der Gleichung (15.2) genügt. Offenkundig gilt

[3] In der Mathematik bezeichnet man mit $y(x)$ die unbekannte Funktion, x die unabhängige Variable und setzt abkürzend $y' := \frac{d}{dx}y$, $y'' = \frac{d^2}{dx^2}y$ etc. bzw allgemein $y^{(n)} := \frac{d^n}{dx^n}y$.

(a) Sind q_a und q_b Lösungen von (L), dann ist die Differenz $q_b - q_a$ eine Lösung der homogenen Gleichung (H).

(b) Aus einer Lösung q_{L} von (L) entsteht jede weitere Lösung q durch Addition einer Lösung q_{H} der homogenen Gleichung, $q = q_{\mathrm{L}} + q_{\mathrm{H}}$.

Das Problem der Bestimmung aller Lösungen von (L) zerfällt demnach in zwei Teilprobleme

1. Ermittlung aller Lösungen der homogenen Gleichung (H)

2. Ermittlung wenigstens einer Lösung der inhomogenen Gleichung (L), in diesem Zusammenhang genannt eine *partikuläre Lösung*.

Aufgrund der Linearität der homogenen Gleichng (H) gilt, dass jede Linearkombination $c_1 q_1 + \ldots + c_k q_k$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) von Lösungen $q_1, \ldots, q_k$ der Gleichung (H) wiederum eine Lösung von (H). Der Gesamtheit der Lösungen von (H) bilden einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$), hier bezeichnet $\mathfrak{L}$.[4] Im allgemeinen ist dieser Funktionenraum höchstens n-dimensional. Im wichtigen Fall, dass die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ allesamt konstant, ist der zugeordnete Funktionenraum sogar genau n-dimensional, wie weiter unten gezeigt wird.

Die Anwendung eines durch (L) beschriebenen Naturgesetzes beinhaltet häufig auch die Vorgabe von n sog. *Anfangswerten*

$$q(t_0), \dot{q}(t_0), \ldots, q^{(n-1)}(t_0)\,. \tag{15.4}$$

Für die DGL des getriebenen Federpendels, $\ddot{q} + \frac{k}{m} q = \frac{1}{m} f(t)$, wären das die anfängliche Auslenkung $q(t_0) = x_0$ und die anfängliche Geschwindigkeit $\dot{q}(t_0) = v_0$, wobei

[4] Unbedingt zu beachten ist, dass jede DGL mit ihrem eigenen Funktionenraum $\mathfrak{L}$ daherkommt.

mit "anfänglich" hier ein willkürlich gewählten Anfangszeitpunkt t_0 gemeint ist (meist $t_0 = 0$). Aus dem alltäglichen Umgang mit Federpendeln weiß man, dass die Vorgabe dieser beiden Daten ausreicht, um das Bewegung des Federpendels für Zeiten $t \geq t_0$ vollständig zu bestimmen. Verallgemeinert erhält man hier den

Satz (Eindeutigkeitssatz) Sofern das Anfangswertproblem der DGL (15.2) überhaupt lösbar ist, ist es eindeutig lösbar, d.h. es gibt genau eine Funktion q, die zum Zeitpunkt t_0 die vorgeschriebenen Werte (15.4) annimmt und die die DGL (15.2) befriedigt.

Der Beweis ist nicht anspruchsvoll, ist aber ein bisschen länglich, weshalb hier auf die Lehrbücher verwiesen wird.[5]

15.2 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ist eine DGL der Form (15.2) worin $a_0, \ldots, a_{n-1}$ komplexe (oder reelle) Konstanten sind. Das Paradebeispiel vermittelt das Teilchen an der Feder. Mit der Kraft $F = -kq$ erscheint Gl. (15.1) in der Form

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0\,, \tag{15.5}$$

aus naheliegenden Gründen genannt die *Schwingungsgleichung*.

Die Schwingungsgleichung (15.5) ist offensichtlich von diesem Typ. Und macht man dort den Ansatz $q = e^{\lambda t}$ mit einer zunächst unbekannten Zahl λ – treffend genannt *e-Ansatz* – schaut man auf die Gleichung $(\lambda^2 + \frac{k}{m})e^{\lambda t} = 0$. Da $e^{\lambda t}$ Nullstellenfrei,

[5] Beispielsweise Königsberger, Analysis I, S. 174f.

kann hier durch $e^{\lambda t}$ gekürzt werden, und man schaut auf die Bestimmungsgleichung $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$. Lösungen dieser Gleichung sind $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, bzw. $\lambda_\pm = \pm i\omega_0$ worin abkürzend $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die sog. *Eigenfrequenz* des Federpendels. Somit sind $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$ Lösungen der (homogenen) Schwingungsgleichung (). Von der pathologischen Ausnahme $k = 0$ (freies Teilchen) abgesehen, sind diese beiden Funktionen linear unabhängig (es gibt keine Zahl α, so dass $\alpha e^{i\omega_0 t} = e^{-i\omega_0 t}$) und da die Zahl der linear unabhängigen Lösungen kleine gleich der Ordnung n der DGL (hier $n = 2$), ist für $k \neq 0$ mit $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$ bereits eine Basis des () zugeordneten Funktionraums gegeben, $\mathfrak{L} = \{Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} | A, B \in \mathbb{C}\}$. In der gewohnten Non-Chalance der Physikerin sagt man: Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung () hat für $k \neq 0$ die Form

$$q(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad \text{mit der Abkürzung } \omega_0 = \frac{k}{m} \tag{15.6}$$

Ausgestatte mit dieser allgemeinen Lösung, kann nun auch das AWP angegangen werden. Für gegebene x_0 und v_0 schaut man auf zwei Gleichungen, die die unbestimmten Amplituden A und B festlegen,

$$x_0 \equiv q(t_0) = Ae^{i\omega_0 t_0} + Be^{-i\omega_0 t_0} \tag{15.7}$$

$$v_0 \equiv \dot{q}(t_0) = i\omega Ae^{i\omega_0 t_0} - i\omega_0 Be^{-i\omega_0 t_0} \tag{15.8}$$

Aufgelöst nach A und B,

$$A = , \qquad B = , \tag{15.9}$$

womit nun alles festliegt: die Lösung der DGL (15.5) zu Anfangswerten $q(t_0) = x_0$ und $\dot{q}(t_0) = v_0$ lautet

$$q(t) = \tag{15.10}$$

Man beachte, dass trotz der vielen komplexen Zwischenschritte die Lösung eine reelle Funktion – gut so, wer wüsste denn, was eine komplexe Auslenkung sein soll?

Die Lösungstheorie der linearen DGL allgemeiner Ordnung n mit konstanten Koeffizienten läßt sich nun zusammenfassen:

Satz (Fundamentalsystem) Seien $\lambda_, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstallen des charakterisitschen Polynoms der DGL (15.3),

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{15.11}$$

und seien $k_1, \ldots, k_r$ deren jeweilige Vielfachheiten, dann hat (15.3) folgende linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda_i t}, \quad t \cdot e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{k_i - 1} \cdot e^{\lambda_i t}, \qquad i = 1, \ldots r\,. \tag{15.12}$$

und jede Lösung von (15.3) ist eine Linearkombination dieser n Lösungen.

Das einzig Neue ist die Möglichkeit, dass P eine mehrfache Nulstelle aufweist, etwa $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$. In diesem Fall sind $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ nicht linear unabhängig. Um hier weiter zu kommen, betrachtet man die mehrfache Nullstelle λ als Grenzlage benachbarter Nullstellen λ und $\lambda + \Delta\lambda$. Mit $e^{\lambda t}$ und $e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}$ ist auch die Linearkombination $\frac{1}{\Delta\lambda}\left(e^{(\lambda+\Delta\lambda)t} - e^{\lambda t}\right)$ Lösung, im Grenzfall $\Delta\lambda \to 0$ geht diese Lösung gegen $te^{\lambda t}$. Und diese Funktion ist offensichtlich einerseits Lösung von (H), andererseits sind $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$ linear unabhängig.

15.3 Variation der Konstanten

Seien $q_1, \ldots, q_n$ ein Fundamentalsystem von (H), und Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ so dass

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_n & \cdots & \dot{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{(n-1)} & q_2^{(n-1)} & \cdots & q_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \tag{15.13}$$

dann ist eine Partikuläre Lösung

$$q_p = U_1 q_1 + \ldots + U_n q_n \tag{15.14}$$

wobei U_i Stammfunktion von u_i.

Beispiel:

$$\ddot{q} + q = \frac{1}{\cos t} \tag{15.15}$$

Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos t \end{pmatrix} \tag{15.16}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan t \end{pmatrix} . \tag{15.17}$$

Stammfunktionen $U_1 = t$, $U_2 = \ln|\cos t|$, somit partikuläre Lösung

$$q_p(t) = t \cdot \sin t + (\ln|\cos t|) \cdot \cos t \tag{15.18}$$

15.4 Nichtlineare DGL

Die linearen DGL sind der am häufigsten anzutreffende Typ von DGL in der Physik, aber zuweilen begegnen einem auch nicht-lineare DGL.