

Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 5 (20 Punkte)

Ausgabe 09.11.2012 – Abgabe 18.11.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

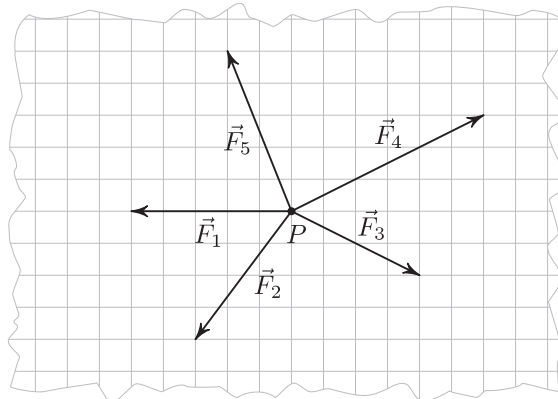
Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum stets nur einen Nullvektor gibt.

▷ Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum zu jedem \vec{v} stets nur ein $-\vec{v}$ gibt.

▷ Aufgabe 3*

Die Abbildung zeigt fünf Kräfte, die an einem Punkt P angreifen. Bestimmen Sie (1) zeichnerisch, (2) arithmetisch die Gegenkraft, die nötig ist, um P in Ruhe zu halten.



▷ Aufgabe 4

Beweisen Sie den Eindeutigkeitsatz der Vektoralgebra: Ist $\mathcal{B} := (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V , dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n. \quad (1)$$

Bemerkung 1: Um die Bestimmtheit der λ_i durch den Vektor \vec{v} auszudrücken, schreibt man statt λ_i gerne v_i (bzw. v^i), und nennt die v^i die *Komponenten* von \vec{v} .

Bemerkung 2: Angesichts des hier bewiesenen Befundes sind alle n -dimensionalen reellen Vektorräume isomorph dem Vektorraum \mathbb{R}^n . Oder – noch prägnanter – eigentlich gibt es nur einen n -dimensionalen reellen Vektorraum, und das ist der \mathbb{R}^n .

▷ **Aufgabe 5***

- (a) Entscheiden Sie, ob die folgenden drei Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (b) Und wie sieht es mit folgenden drei Vektoren aus:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$