Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 9 (20 Punkte)

Ausgabe 10.12.2012 – Abgabe 14.12.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** * (5 Punkte)

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

▷ **Aufgabe 2** (4 Punkte)

Für die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

bestimme man die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren.

Bemerkung: Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (Pendel etc.) nimmt in kanonischen Variable q, p (q:Auslenkung, p:Impuls) die Form an $\dot{q} = \frac{1}{m}p$, $\dot{p} = -m\omega_0^2 q$. In "Matrizenschreibweise" also $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$. Der Exponentialansatz $q = \tilde{q}e^{\lambda t}$, $p = \tilde{p}e^{\lambda t}$ führt dann ganz natürlich auf das Eigenwertproblem zu A.

▷ **Aufgabe 3** (5 Punkte)

Eine wichtige Zahl, die man jeder $n \times n$ quadratischen Matrix A zuordnen kann, ist ihre *Spur* (engl. Trace),

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A^i{}_i \tag{3}$$

also "Summe der Diagonalelemente". Zeigen Sie

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{4}$$

$$\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(A) \tag{5}$$

und schließen: die Spur einer diagnoalisierbaren Matrix ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte.

▷ **Aufgabe 4** (6 Punkte)

Gegeben eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit a, b, c, d komplex. Unter welchen Bedingungen ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls Eigenwerte und Eigenvektoren als Funktion von a, b, c, d.