

# Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 9 (20 Punkte)

Ausgabe 14.12.2012 – Abgabe 21.12.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

---

## ▷ Aufgabe 1 \*

Nehmen Sie Ihr Lieblings-Mathebuch zur Hand, Stichwort “Determinante” und überzeugen sich von folgender Identität ( $A, B, S$  etc sind  $n \times n$ -Matrizen)

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (1)$$

und schließen Sie  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ , sowie  $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$ . Seien Sie gewiss, dass Sie in der Klausur von Ihrem Wissen Gebrauch machen dürfen.

## ▷ Aufgabe 2 \*

Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

## ▷ Aufgabe 3

Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0 \text{ für jedes positives } s \in \mathbb{Q}. \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ für jedes reelle } a > 0. \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (5)$$

## ▷ Aufgabe 4 \*

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung des Summanden könnte sich als nützlich erweisen ...

## ▷ Aufgabe 5

Falls Sie sich jemals gefragt haben, wie man Wurzeln zieht (vulgo “ $\sqrt{2}$  ausrechnet”) – hier ist die Antwort: mit Hilfe der Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (8)$$

worin  $a$  eine vorgegebene reelle Zahl größer Null (deren Wurzel man berechnen möchte).

- (a) Berechnen Sie für den Fall  $a = 2$  und Startwert  $x_0 = 1$  die drei ersten Glieder der Folge (). Lassen Sie sich anschließend die Wurzel aus 2 von Ihrem Taschenrechner anzeigen und vergleichen Sie  $x_3$  mit der Anzeige Ihres Taschenrechners.
- (b) Zeigen Sie: Bei beliebig gewähltem Startwert  $x_0 > 0$  gilt  $x_n \geq \sqrt{a}$  und die Folge () konvergiert ab  $n = 1$  monoton fallend gegen  $\sqrt{a}$ .
- (c) Zeigen Sie, dass der Fehler  $f_n := x_n - \sqrt{a}$  abgeschätzt wird  $|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$ . Schließen Sie, dass für  $x_3$  im obigen Beispiel  $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-4} \cdot 10^{-4}$ . Auf wieviele Stellen (hinter dem Komma) approximiert also  $x_3$  die Zahl  $\sqrt{2}$ ?

▷ **Aufgabe 6 (Weihnachtsstern der Pythagoräer)**

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon), tragen die Diagonalen ein, erhalten so ein Pentagramm, und überzeugen sich davon, dass hier gilt

$$\text{Diagonale} : \text{Seite} = \text{Seite} : (\text{Diagonale} - \text{Seite}) \quad (12)$$

Hinweis: Die Diagonalen bilden in der Mitte wiederum ein Pentagon – hilft das weiter?

Benennen Sie

$$g := \text{Diagonale} : \text{Seite} \quad (13)$$

und zeigen dass  $g$  nicht rational.

Die Zahl  $g$  nennt man den *goldenen Schnitt*. Betrachten Sie zum Startwert  $x_0 = 1$  die Folge

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad (14)$$

und zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$  mit

$$g = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) . \quad (15)$$

Gehen Sie auf Wikipedia, und lesen dort unter dem Stichwort “Pythagoräer” und “Goldener Schnitt” nach, was es mit den beiden auf sich hat.