Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 11 (20 Punkte)

Ausgabe 07.01.2012 – Abgabe 11.01.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** * (1 Punkt)

Die Zahl radioaktiver Atome in einem radioaktiven Präparat zerfalle nach dem Gesetz $N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$. Welche Bedeutung haben die Größen N_0 und γ? Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Atome halbiert?

▷ **Aufgabe 2** (2 Punkte)

Einem Praktikumsbericht entnehmen Sie eine Messdatenkurve, die in doppelt-logarithmischer Auftragung von der Form einer Geraden durch den Punkt $(\xi_0 = 3, \eta_0 = 2)$ mit Steigung $\frac{3}{2}$ ist. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt die Kurve dar? Machen Sie sich ein Bild (Funktionsgraph)!

<u>Hinweis:</u> "Doppelt-Logarithmisch heißt, dass beide Achsen logarithmisch geteilt sind, also statt x und y sind $\xi = \log_a x$ und $\eta = \log_a y$ aufgetragen, wobei üblicherweise $a = 10$.

▷ **Aufgabe 3** * (4 Punkte)

Es spricht nichts dagegen, für die trigonometrischen Funktionen auch komplexe Argumente zuzulassen. Man erweitere einfach die Definitionen, und setze für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1}$$

Zeigen Sie: Nach wie vor gilt hier die Euler'sche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{2}$$

der Satz des Pythagoras

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \tag{3}$$

und die Additionstheoreme

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \tag{4}$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{5}$$

▷ **Aufgabe 4** (π Punkte)

Ebenso wie die trig-Funktionen könne auch die Hyperbelfunktionen für komplexe Argumente definiert werden,

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \tag{6}$$

Zeigen Sie: Die Hyperbelfunktionen und die Trigonometrischen Funktionen sind verknüpft

$$\cosh z = \cos(iz)\,, \qquad \sinh z = -i\sin(iz)\,, \tag{7}$$

woraus sich mit Blick auf (4) und (5) Additionstheoreme angeben lassen,

$$\begin{aligned}\cosh(z+w) &= \cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w & (8)\\ \sinh(z+w) &= \sinh z\cosh w + \cosh z\sinh w\,, & (9)\end{aligned}$$

und es gilt der hyperbolische Pythagoras,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,. \tag{10}$$

Die Reihendarstellung entnimmt man der Reihenddarstellung der Exponentialfunktion und Berücksichtigung von (6),

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{11}$$

▷ **Aufgabe 5** (*e* Punkte)

Eine Folge von Funktionen ($f_n : D \to \mathbb{C}$) heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ der Funktionswerte konvergiert. Ist das der Fall, wird durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \quad x \in D \tag{12}$$

die sog. *Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{C}$ definiert. Dabei kann es passieren, dass zwar jedes Folgenglied f_n stetig, die Grenzfunktion f aber unstetig. Dazu ein Beispiel.

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass für jedes n die Funktion f_n stetig auf $[0,1]$, dass aber die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1\,,\\ 1 & \text{für } x = 1\,.\end{cases} \tag{13}$$

unstetig auf $[0,1]$.

▷ **Aufgabe 6** * (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} &(a) \quad e^{-x}(\sin x - \cos x) & (14)\\ &(b) \quad \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} & (15)\\ &(c) \quad \log_a x & (16)\\ &(d) \quad \sin(\sin x) & (17)\end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 7** * (3 Punkte)

Der Tangens, daran sei erinnert, ist definiert $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Der Arcustangens ist die Umkehrfunktion, also $\tan(\arctan x) = x$. Beweisen Sie

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{18}$$

▷ **Aufgabe 8** (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Funktion $x \mapsto x^x$ für $x > 0$, bilden ihre Ableitung, und skizzieren Sie auch die Ableitung. Was wäre die Ableitung der Funktion $\frac{d}{dx}x^x$? Skizze?

▷ **Aufgabe 9** (3 Punkte)

Für höhere Ableitungen, daran sei erinnert, benutzt man die abkürzende Schreibweise $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $f^{(0)} := f$. Beweisen Sie, für n-mal differenzierbare Funktionen f, g, die *Leibnizregel*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \,. \tag{19}$$