Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 13 (20 Punkte)

Ausgabe 21.01.2012 – Abgabe 25.01.2012 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1* (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Konvergenzradius? Vergleich mit der geometrischen Reihe?

▷ Aufgabe 2* (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Was ist der Konvergenzradius der Reihe? Skizzieren sie die Graphen der Funktion und ihrer ersten 3 Taylorpolynome.

▷ Aufgabe 3* (6 Punkte)

Zeigen Sie: Die Taylorreihe des natürlichen Logarithmus mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ hat Konvergenzradius 1 und ist gegeben

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,, \qquad -1 < x < 1\,. \tag{1}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen des natürlichen Logarithmus, die ersten 3 Taylorpolynome, und das Taylorpolynom 10-ter Ordnung (Wenn's gar nicht anders geht – Computerunterstützt). Wird der Konvergenzradius in ihrer Skizze sinnfällig?

▷ Aufgabe 4 (8 Punkte)

Für die Schwingungsperiode eines physikalischen Pendels der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) als Funktion der Amplitude A gilt

$$T(A) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} \tag{2}$$

wobei $\alpha = \sin(A/2)$. Man berechne das Integeral näherungsweise für kleine A bis zur vierten Ordnung in A und skizziere in dieser Näherung $T(A)$.

▷ Aufgabe 5 (π Punkte)

Beweisen Sie die *Restgliedformel* von Lagrange: Für eine $\mathcal{C}^{N+1}$-Funktion f auf einem offenen allgemeinen Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ gibt es für jedes $x \in D$ eine Stelle ξ_x zwischen a und x, so dass sich das Restglied R_N der Taylorentwicklung von f darstellen lässt

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\,. \tag{3}$$

<u>Hinweis:</u> Nehmen Sie die Taylor'sche Restgliedformel als Ausgangspunkt, schätzen mittels minimalem und maximalem Funktionswerten von f auf dem Integrationsintervall $[a, x]$ (bzw. $[x, a]$) das Restglied nach unten und oben ab, und rufen einen Mittelwertsatz auf: Für f stetig auf $[a, b]$ gibt es zu jedem y zwischen dem globalen Minimum und dem globalen Maximum von f ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$.