Mathematische Methoden LA

- WS 2012/2013 -

Übungsblatt 14 (20 Punkte)

Ausgabe 25.01.2013 – Abgabe 01.02.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 (10 Punkte)

Der Dirichletkern, daran sei erinnert, ist definiert

$$D_N(x - x') := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-x')} \,. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie

$$D_N(x - x') = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left([N + \frac{1}{2}](x - x')\right)}{\sin(\frac{1}{2}(x - x'))} \tag{2}$$

und skizzieren Sie Funktionsgraphen für für festes x' und $N = 1, 2, 10$. Wie würden Sie die Funktion $D_N(x - x')$ für große N in wenigen Worten charakterisieren?

Hinweis: Der Dirichletkern ist ein trigonometrischen Polynom, allerdings ein besonders einfaches: alle Koeffizienten sind gleich. Bevor Sie hier Ihre Formelsmmlung bemühen um die Reihe in eine geschlosse Form zu bringen, setzen Sie abkürzend $\tau := x - x'$, vergewissern sich $e^{in\tau} = (e^{i\tau})^n$, setzen abkürzend $q := e^{in\tau}$, und rufen ihre Kenntnisse die geometrische Reihe betreffend auf: $(1+q+q^2+\ldots+q^m)(1-q) = 1-q^{m+1}$ bzw $\sum_{n=0} mq^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$, die Formel für die endliche geometrische Reihe. Damit ausgerüstet sollten Sie den Beweis führen Können .... Ach ja – und dass die Summe bei $-N$ los geht sollte Sie nicht irritieren. Schreiben Sie doch einfach $q^n = q^{-N} q^{n+N}$, und dann geht doch die Summe über $n + N$ bei Null los ...

(b) Beweisen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left([N + \frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} = 1 \tag{3}$$

Hinweis: Benutzen Sie doch einfach die Definition (1) und integrieren die rechte Seite gliedweise ....

▷ Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto= x^2$ auf dem Intervall $] - \pi, \pi]$. Die periodische Fortsetzung der Funktion ist eine stückweise stetige Funktion mit Knicken bei $x = (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ (Skizze?) Der Differenzenquotient ist aber bei jedem dieser Knicke beschränkt, $|f(x_0 + \tau) - f(x_0)| \leq C|\tau|$, im vorliegenden Fall $C = 2\pi$. Gemäß Vorlesung konvergiert $S_N f$ für $N \to \infty$ punktweise gegen x^2.

(a) Zeigen Sie

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{-1}{n^2} \cos(nx) \,, \qquad x \in [-\pi, \pi] \,. \tag{8}$$

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{9}$$

Hinweis: Betrachten Sie mal Gl. (8) für $x = \pi$ und $x = 0$ ...