Theoretische Physik V
- Quantenmechanik-II (WS 2011/2012) -

Beispiel Klausur ($90 + 15$ Punkte) [1]

Emission 11.01.2013

– keine Hilfsmittel–

Verständnis und Gedächtnisfragen (45 Punkte)

▷ **Aufgabe 1 (Streutheorie)** (15 Punkte)

(a) Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung, Sie erinnern sich, lautet

$$\psi(\vec{x}) \overset{r\to\infty}{\simeq} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}\,. \tag{1}$$

Welche Bedeutung hat die Streuamplitude f für den differentiellen Wirkungsquerschnitt? (Skizze?) (5 Punkte)

(b) Wie berechnet sich f in erster Bornscher Näherung? (5 Punkte)

(c) Was versteht man unter der s-Wellen Streulänge? (5 Punkte)

[1] Notenschlüssel beruht auf 90 Punkten; die 15 Extra-Punkte geben Ihnen mehr Luft zum Atmen ...

▷ **Aufgabe 2 (Klein-Paradoxon)** (15 Punkte)

Beschreiben Sie das Klein-Paradoxon für Dirac-Teilchen mit eigenen Worten. Ist eine Auflösung des Paradox innerhalb der relativistischen Quantenmechanik möglich? (maximal 10 Sätze)

▷ **Aufgabe 3 (Nichtrelativistische Fermionen)** (15 Punkte)

(a) Welcher Algebra genügen die Erzeuger $\hat{a}_k^\dagger$ und Vernichter $\hat{a}_k$ (k ist Modenindex) von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen?

(b) Wie lautet der Operator der Teilchenzahl eines nicht-relativistischen Vielteilchensystems identischer Fermionen?

(c) Was versteht man unter der Fermienergie eines Systems identischer Fermionen?

Rechenaufgaben $(45 + 15$ Punkte$)$

▷ **Aufgabe 4** (10 Punkte)

Für ein nicht-relativistisches System N nicht-wechselwirkender spin-polarisierter Elektronen in einer Falle mit Fallenpotential $V(\vec{x}) = \frac{k}{2}\vec{x}^2$ bestimme man die Teilchendichte $n(\vec{x})$ in Thomas-Fermi-Näherung.

▷ **Aufgabe 5** (15 Punkte)

Für die Potentialstreuung am Potential der "weichen Kugel"

$$V(r) = \begin{cases} V_0(1 - r^2/a^2)\,, & 0 \leq r \leq a \\ 0\,, & r > a \end{cases} \tag{2}$$

berechne man den differentiellen und totalen Streuquerschnitt in erster Born'scher Näherung.

▷ **Aufgabe 6** (20 Punkte)

Ein Diracteilchen ruht für $t < 0$ in einem Zustand positiver Energie mit Spin rauf. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein konstantes Vektorpotential eingeschaltet $\vec{A} = (0, 0, A)$, und zum Zeitpunkt $t = T$ wieder ausgeschaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Diracteilchen für $t > T$ in einem Zustand negativer Energie angetroffen?

▷ **Aufgabe 7** (15 Punkte)

Beweisen Sie: Genügt Ψ im ungestrichenen Koordinatensystem der Dirac-Gleichung im Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$, dann genügt

$$\Psi'(\vec{x}', t') = i\gamma^1\gamma^3\Psi^*(\vec{x}', -t') \tag{3}$$

der Dirac-Gleichung im gestrichenen Koordinatensystem $(ct', \vec{x}') = (-ct, \vec{x})$ im zeitumgekehrten Potential $\vec{A}'(\vec{x}', t') = -\vec{A}(\vec{x}', -t')$, $\Phi'(\vec{x}', t') = \Phi(\vec{x}', -t')$.

Formelsammlung

Minkowskimetrik $\eta \equiv (\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$,

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lotra $\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ mit $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

4er Koordinatenvektor $x \equiv (x^{\mu}) = (ct, \vec{x})$, $(x_{\mu}) = (\eta_{\mu\vec{u}} x^{\nu}) = (ct, -\vec{x})$.

4-er Impuls $p \equiv (p^{\mu}) = (E/c, \vec{p})$

4er-Potential $A = (A^{\mu}) = (\Phi/c, \vec{A})$

4-er Gradient $\partial \equiv (\partial_{\mu}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$

Paulimatrizen (Standarddarstellung)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Gamma-Matrizen (Standarddarstellung)

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{bmatrix} \hat{1}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{1}_2 \end{bmatrix}, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1}_2 \\ \hat{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$