Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2012/2013) -

Übungsblatt 3

Ausgabe 02.11.12 – Abgabe 15.11.12– Besprechung 16.11.12

▷ **Aufgabe 1** (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde die theoretische Beschreibung des elastischen Zwei-Teilchenstoßes eines Probeteilchens mit einem Targetteilchen auf die Potentialstreuung eines "Relativteilchens" im Schwerpunktsystem zurückgeführt. Hier gilt es nun, den differentiellen Streuquerschnitt des Relativteilchens $d\sigma$ mit dem differentiellen Streuquerschnitt des Probeteilchens $d\sigma_1$ in Beziehung zu setzen.

Wir nehmen an, dass das Targetteilchen (Teilchen 2) anfänglich im Laborsystem in Ruhe. Die Ablenkwinkel des Probeteilchens (Teilchen 1), gemessen relativ zu seiner Einfallrichtung, sei bezeichnet θ, ϕ, die Ablenkwinkel des Relativteilchens im Schwerpunktsystem ϑ, φ. Man beachte, dass der Schwerpunkt im Schwerpunktsystem definitionsgemß̈ in Ruhe, während er sich Laborsystem mit konstanter Schwerpunktgeschwindigkeit bewegt.

(a) Überzeugen Sie sich zunächst von der Identität $d\sigma_1(\theta, \phi) = d\sigma(\vartheta, \varphi)$.

<u>Hinweis:</u> Die Definition des Wirkungsquerschnittes basiert auf eine Verhältniss von einlaufendem zu auslaufendem Fluss, wobei die Flüsse in beiden Fällen *relativ zum Streuer* gemessen werden.

(b) Beweisen Sie den Zusammenhang der Ablenkwinkel

$$\phi = \varphi\,, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\vartheta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad \cos\theta = \frac{\cos\vartheta + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta + \frac{m_1^2}{m_2^2}}}\,. \tag{1}$$

(c) Schließen Sie

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1} = |f(\vartheta, \varphi)|^2 \left|\frac{d\Omega}{d\Omega_1}\right| = \frac{\left(1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta + \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|1 + \frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta\right|} |f(\vartheta, \varphi)|^2\,. \tag{2}$$

▷ **Aufgabe 2** (3 Punkte)

In der Vorlesung wurde ohne Kommentar die Zählrate eines (idealen) Teilchendetektors, der durch eine effektive Detektorfläche Σ charakterisiert ist, mit dem Flächenintegral der W'keitstromdichte, $\int_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{a}$, identifiziert. Begründen Sie zunächst diese Identifikation um sie anschließend zu problematisieren.

<u>Hinweis:</u> Sich beizeiten an die Kontinuitätsgleichung zu erinnern ist für die Begründung hilfreich. Für die Problematisierung stellen Sie sich vor der Detektor sei ideal empfindlich und erinnern sich an die Übungsaufgabe zum Zeno-Paradox aus der QM-I Vorlesung ...

Für die auslaufende Kugelwelle $\psi = f e^{ikr} r$ berechne man die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j} = \frac{1}{m}\Re\left[\psi^* \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi\right]$ und bestätige für $r \to \infty$ das asymptotische Verhalten $\vec{j}^{\text{out}} \overset{r\to\infty}{\sim} \frac{\hbar k}{m}\frac{|f|^2}{r^2}\vec{e}_r$.

▷ Aufgabe 3 (Berechnung von $G_0^{(\pm)}$) (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde die freie Greensfunktion über die Resolvente des freien Hamiltonoperators $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$ eingeführt. In Ortsdarstellung

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = \left\langle \vec{x} \left| \frac{1}{E - \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} \pm i\epsilon} \right| \vec{x}' \right\rangle \tag{7}$$

Beweisen Sie

$$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,. \tag{8}$$

worin $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

<u>Hinweis:</u> An geeigneter Stelle "Impuls-Eins" $\hat{1} = \int |\vec{s}\rangle\langle\vec{s}| d^3s$ einschieben, wobei $\hat{\vec{p}}|\vec{s}\rangle = \hbar\vec{s}|\vec{s}\rangle$, und sich an den Residuensatz erinnern ...

▷ Aufgabe 4 (Yukawa-Streuung)* (4 Punkte)

Illustrativ das Beispiel der Streuung am Yukawapotential

$$V(r) = V_0\frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \tag{13}$$

für die wir Sie bitten, die Streuampltitude, den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in der ersten Born'schen Näherung zu berechnen. Diskutieren Sie bitte auch den Grenzfall $\mu, V_0 \to 0$ mit $V_0/\mu = ZZ'e^2/(4\pi\epsilon_0)$ fest, in dem das Yukawapotential die Form des Coulomb- bzw. Gravitationspotentials annimmt.

▷ Aufgabe 5 (Elektron-Atom Streuung) (4 Punkte)

Auch ein beliebtes Schmankerl ist die elastische Streuung von Elektronen an einem neutralen Atom. Das Wechselwirkungspotential ist $V = -e_0\Phi$ ($-e_0$ ist die Ladung des Elektrons), wobei Φ das elektrostatische Potential des Atoms,

$$\Delta\Phi = -e_0[Z\delta(\vec{x}) - \rho(\vec{x})]/\epsilon_0 \tag{17}$$

worin Z die Kernladungszahl des Atoms, und ρ die Ladungsverteilung seiner Elektronen, $\int d^3x\rho(\vec{x}) = Z$. Bestimmen Sie den einen Ausdruck für den differentiellen Streuquerschnitt in Bornscher Näherung; machen Sie, sofern nötig, vom sog *Formfaktor* der elektronischen Ladungsverteilung Gebrauch,

$$F(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'}\rho(\vec{x}')d^3x'\,. \tag{18}$$

Wenden Sie Ihre Erkenntnisse auf die Streuung von Elektronen an atomarem Wasserstoff im Grundzustand an. Diskutieren Sie den differentiellen Streuquerschnit im Regime großer und kleiner Energien.

Hinweis: Jetzt bloß nicht die Laplacegleichung (17) lösen! In Bornscher Näherung brauchen wir doch nur die Fouriertransformierte des Potentials $\Phi(\vec{x})$ – und dazu reicht es doch, die Laplacegleichung einer Fouriertransformation zu unterwerfen ....