Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2012/2013) -

Übungsblatt 4

Ausgabe 23.11.12 – Abgabe 30.11.12– Besprechung 30.11.12

▷ **Aufgabe 1**

Die Bewegungsgleichung einer Punktladung (Masse m, Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, liest sich in einem Laborsystem

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{1}$$

wobei $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}(t), t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}(t), t)$ und $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

(a) Überzeugen Sie sich, dass Gleichung () nicht anderes als die Euler-Lagrangegleichung einer Wirkung

$$S = \int_a^b \{-mcds - eA_\alpha dr^\alpha\} \tag{2}$$

worin (A^α) das 4-erPotential des Feldes, (dr^α) Inkrement eines Minkowskiweges, der vom Ereignis a zum Ereignis b führt, und $ds = \sqrt{|dr_\alpha dr^\alpha|}$ die entsprechende Minkowskilänge des Inkrements (ds/c ist das Eigenzeitinkrement längs des fraglichen Minkowkiweges).

<u>Hinweis:</u> Die Wirkung ist ist hier so formuliert, dass ihr relativistisch invarianter Charakter klar zu Tage tritt. Für die Bestimmng der Bewegungsgleichungen im Laborsystem, wo $(A^\alpha) = (\Phi/c, \vec{A})$ und $(dr^\alpha) = (cdt, d\vec{r}(t))$, ist es geraten, die Wirkung umzuformulieren $S = \int_{t_a}^{t_b} Ldt$ mit der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} + e\vec{A}\cdot\vec{v} - e\Phi \tag{3}$$

Im übrigen tut man gut daran, sich an den Zusammenhang von Potential und Feld zu erinnern, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, und zu beachten, dass in () $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$ bzw. $\Phi = \Phi(\vec{r}(t), t)$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass der kanonische Impuls

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial\vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + e\vec{A} \tag{4}$$

die Energie

$$E \equiv \vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + e\Phi \tag{5}$$

und also die Hamiltonfunktion

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2} + e\Phi \tag{6}$$

(c) Benutzen Sie das Korrespondenzprinzip $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ um die Klein-Gordongleichung eines elektrisch geladenen Punktteilchens im elektromagnetischen Feld abzuleiten.

Quantenmechanisch wird die Bewegung eines Teilchens der Ladung e im elektromagnetischen Feld, Sie erinnern sich, in der minimalen Kopplung beschrieben, indem man Differentialoperatoren der "freien Wellengleichung" ersetzt $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi$ und $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}$. Mittels 4er Impuls $(p^\nu) \equiv (E/c, \vec{p})$ und 4er Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$ daher (beachte Stellung des 4-er Index)

$$p_\nu \to i\hbar\partial_\nu - eA_\nu \tag{7}$$

Das passt übrigens ganz gut: Ableitung nach kontravarianten Koordinaten x^μ gibt kovariante Komponenten.

(d) Zeigen Sie, dass mit dieser Vorschrift die bereits in (c) gefundene Klein-Gordongleichung die Form annimmt

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0\,. \tag{8}$$

worin

$$D_\mu := \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \tag{9}$$

die sog. *kovariante Ableitung*.

Bemerkung: Das "Kovariieren" bezieht sich dabei aber nicht auf das Verhalten unter Lo'tra, sondern bezieht sich auf das Transformationsverhalten unter Eichtransformationen,

$$\phi \quad\to\quad \phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}\phi\,, \tag{10}$$

$$A_\mu \quad\to\quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \tag{11}$$

gemäß

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}D_\mu\phi \tag{12}$$

Kurz: die kovariante Ableitung von Feld ϕ (die Ableitung mit D) transformiert unter Eichtrafos genauso wie Feld selber (die einfachte partielle Ableitung tut das nicht).

(e) In Analogie zur freien Klein-Gordongleichung: Wie lautet die Ladungsbilanz in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes?

▷ Aufgabe 2

Zur Erinnerung: Funktional ist eine Abbildung $F : M \to \mathbb{R}$ worin M eine irgendwie interessierende Menge von Funktionen, meist über dem $\mathbb{R}^n$. Um anzudeuten, dass es sich bei F um ein Funktional (eine "Funktion von Funktionen") handelt, schreibt man $F[\phi]$ – also das Argument (die Funktion ϕ) in eine eckige Klammer.

Wichtige Begriffe sind

- *Funktionaldifferential*, notiert δF, erklärt via

$$F[\phi + \delta\phi] = F[\phi] + \delta F[\phi] + O(\delta\phi)^2 \tag{13}$$

in Analogie zur Analysis $f(\xi + \Delta\xi) = f(\xi) + df(\xi) + O(\Delta\xi)^2$.

- *Funktionalableitung* erklärt via

$$\delta F[\phi] = \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) d^n x \tag{14}$$

in Analogie zur Analysis $df(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} d\xi^i$.

Zeigen Sie: Für Funktionale der Form

$$F[\phi] = \int_G \mathcal{F}(\phi(x), \partial_i\phi(x); x) d^n x \tag{15}$$

worin die Dichte $\mathcal{F}$ eine (meist algebraische) Funktion von $\phi(x)$, den ersten Ableitungen $\partial_i\phi(x)$, und möglicherweise externen Feldern $j(x)$ (die nicht variiert werden), gilt insbesondere

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\phi(x)} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_i\phi(x))} \tag{16}$$

für alle Funktionen ϕ im Definitionsbereich von F, die auf dem Rand ∂G den Wert Null annehmen.