Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2012/2013) -

Übungsblatt 5

Ausgabe 14.12.12 – Abgabe 10.01.13– Besprechung 11.01.13

▷ Aufgabe 1 (Omnipräsenz der negativen Energien)

Betrachten Sie ein freies Dirac-Teilchen das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\psi(\vec{x}, t=0) = \frac{1}{[2\pi a^2]^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/(4a^2)+i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

beschrieben wird, also "Gauss'sches Wellenpaket" ausschließlich positiver Energie-Komponenten.

Zeigen Sie durch Lösen des Anfangswertproblems der freien Dirac-Gleichung: (a) Zu einem späteren Zeitpunkt entwickelt ψ Anteile negativer Energie. (b) Die Anteile werden $O(1)$, wenn a von der Größenordnung oder kleiner als die Comptonwellenlänge.

Merke: Versucht man Teilchen besser als ihre Comptonwellenlänge zu lokalisieren wird man mit relativistischen Effekten konfrontiert.

▷ Aufgabe 2 (Zitterbewegung von Dirac-Teilchen)

Zitterbewegung bezeichnet die scheinbar zittrige Bewegung eines freien Dirac Teilchens. Statt im Schrödingerbild, analysieren wir hier die Zitterbewegung im Heisenbergbild. Im Heisenbergbild bewegen sich die Operatoren gemäß[1]

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[O(t), H\right] , \tag{2}$$

mit H Dirac Hamiltonoperator,

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2 \, . \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0 \, , \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv \vec{v}(t) = c\vec{\alpha}(t) \, , \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} = \frac{2}{i\hbar}\left(c\vec{p} - H\vec{\alpha}(t)\right) \, . \tag{6}$$

(b) In der Vorlesung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Eigenwerte der α-Matrizen gleich ± 1, und es wurde geschlossen, dass Diracteilchen sich daher nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können. Erlaubt die Quantenmechanik, diesen Befund experimentell zu verifizieren? Falsifizieren?

[1] Um die Notation nicht unnötig aufzublähen verzichten wir auf die Hüte auf den Operatoren.

(c) Bestätigen Sie durch Integration der Bewegungsgleichungen (4)–(6),

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c^2\vec{p}}{H}t + \frac{\hbar c}{2i}H^{-1}\left(e^{2iHt/\hbar} - 1\right)\left(\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}\right) . \tag{7}$$

(d) Identifizieren Sie in (7) den Term, der der Bewegung eines Welllenpakets mit der Gruppengeschwindigkeit entspricht.

(e) Analysieren Sie den oszillierenden Term in (7), der der Zitterbewegung entspricht. Bestätigen Sie, dass die Zitterbewegung von der Interferenz von Zuständen positiver und negativer Energie herrührt.
Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der Operator $\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}$ nur zwischen Zuständen mit gleichem Impuls nichtverschwindende Matrixelemente besitzt. Schließen Sie sodann aus $\vec{\alpha}H + H\vec{\alpha} = 2c\vec{p}$ (Beweis!), und also $(\vec{\alpha} - \frac{c\vec{p}}{H})H + H(\vec{a} - \frac{c\vec{p}}{H}) = 0$, dass die Energien entgegengesetzt sein müssen.

▷ Aufgabe 3 (Klein'sches Paradox)

Die Streuung an der Potentialschwelle, Sie erinnern sich, ist eine beliebte Übungsaufgabe der nicht-relativistischen Quantenmechanik.

Um die Sache nicht unnötig zu komplizieren untersuchen wir die Streuung geladener Klein-Gordon Teilchen in einer Dimension. Zuständig ist die Klein-Gordongleichung

$$\left\{\frac{1}{c^2}\left(\partial_t + ie\Phi(z)\right)^2 - \partial_z^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\phi(z,t) = 0 \tag{8}$$

worin $\Phi(z)$ die Potentialschwelle

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ \Phi_0\,, & z > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Analysieren Sie die Streung monoergetischer Teilchen der Energie E die von links einfallen, also $\Phi_{\text{in}}(z,t) = e^{-iEt/\hbar + ikz}$. Bestimmen Sie Reflektions- und Transmissionkoeffizienten R und $T = 1 - R$ der Schwelle. Wenden Sie Ihre Augenmerk auf den Fall der "hohen Schwelle" $e\Phi_0 > E + mc^2$, überzeugen sich, dass in diesem Fall $R > 1$ und $T < 0$, und suchen Sie diesen merkwrdigen Befund des sog Klein'schen Paradox zu interpretieren.

▷ Aufgabe 4 (Adiabatische Elimination)

Gegeben 2 lineare, gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$i\dot{\varphi} = \delta\varphi + \varepsilon\chi \tag{10}$$

$$i\dot{\chi} = \varepsilon^*\varphi - m\chi \tag{11}$$

mit komplexer Konstanten ε und reellen Konstanten m, δ.

Zeigen Sie, dass für $|m| \gg |\varepsilon|, |\delta|$ und bestimmte Anfangsbedinungen (welche?) die "langsame" Variable φ (woher diese Bezeichung?) die "schnelle" Variable χ (woher nun diese Bezeichung?) "versklavt" (nun auch *das* noch ...),

$$\chi(t) \approx \frac{\varepsilon^*}{m}\varphi(t)\,, \tag{12}$$

und die langsame Variable in führender Ordnung (welcher Entwicklung?) einer Differentialgleichung

$$i\dot{\varphi} = \left(\delta + \frac{|\varepsilon|^2}{m}\right)\varphi \tag{13}$$

genügt, die nun wirklich leicht zu lösen ist.

<u>Bemerkung:</u> Mit der hier einstudierten "Methode der adiabatischen Elimination" haben Sie was für's Leben. Sie gestattet Ihnen beispielsweise, blitzschnell die Pauligleichung aus dem nicht-relativistischen Grenzfall der Dirac-Gleichung abzuleiten.

▷ Aufgabe 5

Stellen Sie eine Liste von Ihrer Meinung nach wichtigen Grössen der Physik auf (etwa: Energie, Impuls,. . . , Potential,. . . , elektrisches Feld,. . .) und diskutieren Sie deren Transformationsverhalten unter (i) Raumspiegelung $x \to -x$, (ii) Zeitumkehr $t \to -t$, und (iii) Ladungskonjugation $e \to -e$.

▷ Aufgabe 6

In der Vorlesung haben Sie die $\sigma_{\mu\nu}$ Matrizen,

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] , \tag{14}$$

und die "gamma-fünf" Matrix kennengelernt,

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 . \tag{15}$$

(a) Zeigen Sie: in der Standarddarstellung

$$\sigma_{0i} = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, 3 , \tag{16}$$

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \qquad 123 \text{ zyklisch} . \tag{17}$$

(b) Zeigen Sie

$$\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0 , \qquad \left(\gamma^5\right)^2 = \hat{1} , \tag{18}$$

wobei in der Standarddarstellung

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Nun sei S_Λ die 4×4-Matrix der Spinor-Darstellung einer Lorentztransformation $(\Lambda^\mu{}_\nu)$.

(c) Zeigen Sie

$$S_\Lambda^\dagger \gamma^0 S_\Lambda = \lambda\gamma^0 , \tag{20}$$

wobei

$$\lambda = \begin{cases} +1 & \text{für } \Lambda^0{}_0 \geq +1 \\ -1 & \text{für } \Lambda^0{}_0 \leq -1 \end{cases} . \tag{21}$$

<u>Hinweis:</u> Sich hier von Lehrbüchern inspirieren zu lassen ist nicht ehrenrührig. Die Nuss selbst zu knacken verdient allerdings größte Anerkennung . . .