

Kräfte durch Licht

Wintersemester 2013/14

Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4

Ausgabe: 03. Dezember 2013

Diskussion: 16. Dezember 2013

Problem 4.1 – Spannungstensoren (20 points)

(1) Wiederholen Sie die Navier-Stokes-Gleichung aus der Hydrodynamik und bringen Sie sie in eine Form, die ihren Charakter als Impulsbilanz deutlich macht.

(2) Zeigen Sie, dass für eine gewöhnliche Flüssigkeit die Druckkräfte $-\nabla p$ aus einem Spannungstensor $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ entstehen. (Keine Garantie für das Vorzeichen.) Geben Sie den Spannungstensor für Scher- und Volumenviskosität an. Wiederholen, dass für ein ideales Gas (Massendichte ρ) gilt:

$$T_{ij} = -\frac{\rho}{2}\langle v_i v_j \rangle \quad (4.1)$$

wobei der Mittelwert über die Geschwindigkeitsverteilung der Gasteilchen zu nehmen ist. Wiederholen Sie das Ergebnis aus der idealen Gasgleichung. Mit welchen Symmetrieargumenten kann man $T_{ij} \sim \delta_{ij}$ begründen?

(3) In der relativistischen Theorie von Gasen kann man den Spannungstensor auf einen 4er-Tensor verallgemeinern. Begründen Sie den Ansatz

$$T_{\mu\nu} \sim \frac{1}{\rho}\langle p_\mu p_\nu \rangle \quad (4.2)$$

wobei die Massendichte ρ ein Lorentz-Skalar ist und p_μ der 4er-Impuls ist. Zeigen Sie, dass die Spur $\text{tr } T = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ ein Skalar ist. Für ein Photonengas ergibt sich $\text{tr } T = 0$ (warum?).

(4) Berechnen Sie für ein Photonengas im thermischen Gleichgewicht den Mittelwert des Spannungstensors

$$\langle T_{ij} \rangle = \varepsilon_0 \left\langle E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 \right\rangle + \mu_0 \left\langle H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{H}^2 \right\rangle \quad (4.3)$$

Im freien Raum? In einem Medium? Erkundigen Sie sie über den Zahlenwert des Photonendrucks auf der Oberfläche der Sonne, im Vergleich zum dort herrschenden Gasdruck.