Kapitel 1

Vorab

Ein notorisches Problem im Lehramtsstudium Physik ist die Mathematikausbildung, die im Vergleich zum 1-Fachstudium Physik mager ausfällt. Betroffen sind insbesondere Lehramtsstudierende, die weder im Haupt- noch im Nebenfach (Studienordnung vor 2013) bzw als anderes Fach (Studienordnung ab 2013) Mathe belegt haben. Ihnen – aber nicht nur ihnen – sollen die "Mathematische Methoden der Physik" das nötige Handwerkszeug vemitteln um im Physikstudium über die Runden zu kommen.

Die MathMeth werden in Potsdam über zwei Semester gestreckt. Im Wintersemester werden im Format 2V1Ü die Vektorrechnung, komplexe Zahlen und Grundlagen der reellen Analysis behandelt. Im Sommersemester folgen im Format 2V1Ü die Vektorfelder, DivGradRot und die Integralstze von Gauss und Stokes.[1] Die Portionierung

[1] xVyÜ steht für "x Semesterwochenstunden (SWS) Vorlesung nebst y SWS Übung". Das Normsemester hat 15 Wochen. Entsprechend sitzen Sie im Forma 2V1Ü genau 45 Schulstunden in der Uni rum . . .

der Inhalte folgt der Regel “eine Woche – ein Thema – ein Kapitel (im Skript)”.

Außer dem kleinen Ein-Mal-Eins und einer gehörigen Portion Disziplin werden keinerlei Kompetenzen vorausgesetzt. Wer die Regeln der Bruchrechnung vergessen hat – und das kann ja schon mal passieren – wird in den ersten Vorlesungen an sie erinnert.

Die Notizen erheben keinerlei Anspruch auf Originalität, sind vollständig unvollständig und voller unbeabsichtigter Fehler. Aktualisierungen und weiteres Material zur Vorlesung finden Sie im Ordner “Teaching” auf `http://www.quantum.physik.uni`

1.1 Physik und Mathe

Physik und Mathematik sind wie ein Zwillingspaar. Das eine ist ohne das andere nichts, und keiner war ehr da.[2] Warum allerdings eine empirische Disziplin, deren letzter Richter immer das Experiment, und eine theoretische Disziplin, deren letzte Instanz immer die Beweisbarkeit (das Manipulieren von Aussagen), so wundersam verschränkt sind, weiß man nicht so recht. “Warum”, fragt Eugene Wigner in einem bemerkenswerten Aufsatz von 1960, “ist die Mathematik in der Physik so effektiv?”.[3] Eine Antwort kann Wigner auch nicht geben. Lesenswert ist der Aufsatz allemal.

Galilei Galileo, der Vater der experimentellen Naturwissenschaften, hat sich wenig

[2] In einer glänzenden Philippika *On teaching mathematics* (1997, nachzulesen auf: `http://pauli.uni-muenster.de/ munsteg/arnold.html`) geißelt der große Mathematiker V.I. Arnol’d seine Fachkollegen, sie hätten sich in der Lehre von der Verschränkung von Physk und Mathematik unverhältnismäßig weit entfernt. Insbesondere die eher mittelmäßig begabten Mathematiker würden nur noch einem blutleeren Götzen der reinen Axiomatik huldigen um ihre Mediokrizität zu verbergen.

[3] Eugene Wigner *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* in: Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (Februar 1960).

um das "Warum" geschert, sondern kurz und bündig konstatiert:

> Das Buch der Natur kann man nur verstehen, wenn man vorher die Sprache und die Buchstaben gelernt hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Hilfsmittel ist es Menschen unmöglich, auch nur ein Wort davon zu begreifen.

Das soll nun erst mal als Begründung reichen, warum Sie ausgerechnet Mathe studieren sollen, wo sie doch Physik studieren wollen ...

Heutzutage sind allerdings nicht geometrische Figuren die "Buchstaben der Mathematik", sondern Zahlen, Vektoren und Morphismen, und auch die Sprache – ehemals Arithmetik und Geometrie – ist um Analysis und Lineare Algebra erweitert.

So kommt es, dass in den Einführungsvorlesungen eines Physikstudiums ohne viel Federlesen sogleich von Funktionen, Ableitungen und Integralen die Rede ist, so manche Funktion in einer Taylorreihe entwickelt oder in einer Fourierreihe dargestellt wird, kurz mal eben Differentialgleichungen integriert und Vektoren in der einen oder anderen Art mutlipliziert werden.

In den ersten Vorlesungen zur Experimentalphysik, beispielsweise, kommen aus der Analysis zum Einsatz

- Die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, nebst der Formel für ihre Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.1}$$

- Komplexe Zahlen mit der imaginären Einheit i, definiert $i^2 = -1$.

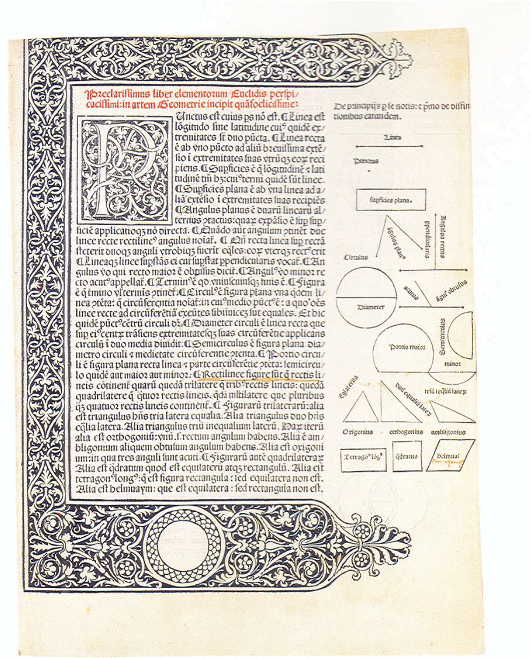

Abb 1.1 *Euklids "Elemente" – die Sprache der Mathematik zu Galileis Zeit.*

- Die Exponentialfunktion e^x und die Trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, ihre charakteristischen Merkmale, insbesondere $e^{ax}e^{bx} = e^{(a+b)x}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, nebst ihrer jeweiligen Ableitung $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ und Stammfunktion $F(x) := \int^x f(x')dx'$.

- Die Produkt- und Kettenregel der Differentialrechnung und die Technik der partiellen Integration für die Integralrechnung.

- Die Taylorentwicklung bzw Taylorapproximation einer “komplizierten” Funktion durch eine “einfache” Funktion

- Differentialgleichungen, etwa in Form “Masse-mal-Beschleunigung gleich Kraft”. Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, und das besagte Gesetz nimmt dann im einfachsten Fall die Form der gewöhnliche Differentialgleichung $m\frac{d^2}{dt^2}q(t) = F(q(t))$ an. Gesucht ist bei so einer Differentialgleichung immer eine Funktion die die Differentialgleichung befriedigt, in unserem Beispiel also irgendeine Funktion $q(t)$, die – wenn man sie zwei mal ableitet und mit m multipliziert das gleiche liefert wie die Funktion $f(t) = F(q(t))$.

und aus der linearen Algebra

- Vektor, bildlich “Pfeil”

- Länge eines Vektors, Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$, Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ und Spatprodukt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

- Matrix, insbesondere 3×3 Matrix für die Darstellung von Tensoren (Trägheitstensor etc.) und Koordinatentransformation, insbesondere Drehung des Koordinatensystems

- Determinante, für die Berechnung von Volumina, aber auch zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer linearen Differentialgleichung usw.

Wie schon gesagt – in den ersten paar Vorlesungen ... und dann geht das genauso weiter. Die Liste soll übrigens keinsfalls behaupten, dass Sie das alles schon in der Schule gehabt haben. Das haben Sie wahrscheinlich nicht. Es ist nur eine Liste von den Dingen, mit denen Sie vermutlich ganz schnell konfrontiert werden.

Mathematik lernen entspricht dem Erlernen einer Fremdsprache. Eine Fremdsprache aber, in der sie nicht irgendwann einkaufen oder im Restaurant bestellen können, sondern einer Fremdsprache mit der sie sich eine andere Fremdsprache – die Physik – erschließen. Wenn Sie nämlich physikalische Sachverhalte beschreiben, und schließlich auch verstehen, dann treffen Sie mathematische Aussagen über physikalische Größen. Johann Keplers "Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen" ist so eine Aussage – auch wenn Sie hier kein Gleichheitszeichen sehen und keine Formel. Verstehen tun Sie diese Aussage als mathematisch notwendige Konsequenz einer Kombination des Newton'schen Gravitationsgesetzes, demzufolge die Anziehungskraft zweier Massen umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstands, mit dem Äquivalenzprinzip, demzufolge sich träge und schwere Masse eines Körpers bis aufs Haar gleichen. Wohlgemerkt, die Prinzipien sind Physik, die Konsequenzen sind nichts als ein mathematisches Essay.[4]

Solche Essays zu lesen, und im täglichen Physikerdasein selber kleine Essays zu verfassen bedarf es mehr als nur die "Buchstaben" zu kennen und zu erkennen. Sie müssen auch Wörter und vollständige Sätze bilden können, möglichst mit richtiger Kommasetzung. Sie müssen – kurz gesagt – auch die Grammatik der Mathematik

[4] Newton ging hier übrigens genau in der anderen Richtung vor. Sein Ausgangspunkt war Keplers drittes Gesetz. Sein Endpunkt war sein Gravitationsgesetz, wobei der auf dem Weg die Analysis mal eben kurz aus der Taufe hob – vgl. die Handreichung "Kepler, Newton und so" auf der Webseite des Kurses.

zumindest in ihren Grundzügen beherrschen.

Es gibt Kollegen die überzeugt sind, dass beispielsweise die ganzen Grenzwert-Betrachtungen der Analysis – im Jargon genannt “die Epsilontik” – für den wahren Physiker überflüssige Grammatik ist: *Hauptsache, man kann den Sinus ableiten und integrieren! Der Rest ist was für Erbsenzähler* sagen sie, *und fürs Erbsenzählen hat man in der Physik schon gar keine Zeit.* Der Kollege hat natürlich völlig Recht: niemand, der noch alle Tassen im Schrank hat, wird im täglichen Geschäft bei der Ableitung des Sinus zur Epsilontik greifen. Das muss Zack-Zack gehen, und Zack-Zack kommt nur durch Übung. Der Kollege hat den Sinus schon tausendmal abgeleitet, und nun geht das bei ihm ganz mechanisch (er “sieht” sofort Cosinus). Das Fundament – die Epsilontik – konnte ihm dabei getrost aus seinem Blickfeld geraten. Aber wenn er zurückdenkt an seine eigene Studienzeit fällt ihm vielleicht auf, dass gerade seine *eigene* Einsicht in die Festigkeit des Fundaments es ihm schließlich erlaubt hat, sich aus dem Keller in die oberen Etagen zu bewegen. Und wenn er denn gefragt wird, wie man denn $\sqrt{2}$ ausrechnet, dann wird er zwar die Antwort nicht parat haben,[5] aber er wird hoffentlich einen Weg zurück in den Keller kennen, und dort eine Ecke am Fundament angeben können, wo man die Antwort findet.

Es hilft also nichts. Nur “Rechnen können” reicht nicht aus. Man muss auch die Fundamente kennen und sich ihrer Festigkeit selbst vergewissert haben. Man muss – um noch ein Bild zu bemühen – bei Adam und Eva anfangen. Bei Menge und Zahl, bei Folge und Reihe, bei Klein und Groß. Dabei muss man aber möglichst schnell auch Sinus ableiten und Tangens integrieren können. Tja – wenn das mal gut geht . . .

[5] es sei den er greift zu besonders geistreichen Antwort *Mit dem Computer!*

1.2 Literatur

Mathematik lernen Sie nicht in der Vorlesung. Die zeigt allenfalls einen roten Faden der ihr Selbststudium erleichtern soll. Mathematik lernen Sie indem Sie in der Vorlesung mitschreiben, Ihre Mitschrift zu Hause in Ordnung bringen, die Übungen bearbeiten und – mit Papier und Bleistift gewappnet – ein Mathebuch lesen. Empfohlen sei hier

- Alfred Rieckers und Kurt Bräuer "Einladung zur Mathematik", Logos 2002. Tut was es behauptet. Nicht sonderlich systematisch, aber guter Leitfaden für die Vorlesung.
- Siegfried Großmann "Mathematischer Einführungskurs – für die Physik", 8. Auflage, B. G. Teubner 2000. Mit Ausnahme der Rechnens im Komplexen ist hier auf nur 344 Seiten alles zusammengefasst, "was man so braucht". Etwas "rechenorienterter" als Rieckers/Bräuer; setzt allerdings voraus, dass Sie ihr Abi vor G12 gemacht haben . . . am besten in den 1970'er Jahren oder davor.
- Herrmann Schulz "Physik mit Bleistift", 7. Auflage, Harri Deutsch 2009. Sehr gut, wenn man schon einen roten Faden hat, aber nicht weiß, wo der hinführt. Ausgezeichnet die Pflege von Papier-und-Bleistift.

Etwas härtere Kost, aber Grundlage dieser Vorlesung

- Friedhelm Erwe "Differential- und Integralrechnung" (Band 1: Elemente der Infinitesimalrechnung und Differentialrechnung, Band 2: Integralrechnung), B.I. Hochschultaschenbücher Bde. 30 und 31, B.I.-Wissenschaftsverlag 1962, [ISBN 3-411-00030-9 und 3-411-00031-7]. Solide Wertarbeit. Hat bereits Generationen von Mathe- und Physikstudenten gedient.

- Konrad Königsberger “Analysis 1” (5. Auflage), Springer 2001 [ISBN 3-540-41282-4] und “Analysis 2” (3. Auflage), Springer 2000 [ISBN 3-540-66902-7]. Thematische Breite und Tiefe in etwa wie Erwe, in der Sprache etwas moderner. Empfehlenswert.

- Klaus Jänich “Mathematik 1 – Geschrieben für Physiker” und “Mathematik 2 – Geschrieben für Physiker”, Springer 2001 und 2002 [ISBN 3-540-41976-4 und 3-540-42839-9]. In parlierendem Ton das volle Programm für den kanonischen Fachstudenten im Physik Bachelor. Zuweilen geht die Gratwanderung zwischen Fachsystematik der Mathematik und Zielgruppenorientierung Physik schief. Das stört die Puristen, lässt mich aber vergleichsweise kalt.

- “Analysis I” und “Analysis II” von Herbert Amann und Joachim Escher, Birkhäuser. Meine derzeitigen Favoriten. Nicht ganz so trocken wie Erwe oder Königsberger, nicht ganz so verplaudert wie Jänich. Insbesondere auch für Studierende der Mathematik hervorragend geeignet.

Vertiefende Monographien zu speziellen Kapiteln:

- Heinz-Dieter Ebbinghaus et al. “Zahlen”, 3. Auflage, Springer 1992. Ok – eher was für Aficionados. Aber zauberhaft in seinen Ausführungen zur Ideengeschichte der Mathematik. Also genau das richtige für Studierende in Lehramtsstudiengängen ...

- Klaus Jänich “Lineare Algebra”, 7. Auflage, Springer 1998 [ISBN 3-540-64535-7]. Ein wunderbares Lehrbuch zu einem wichtigen Werkzeug der Physik. Für Mathematik- und Physikstudierende gleichermaßen geeigent.

- Klaus Jänich “Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen”, 3. Auflage, Springer 1995 [ISBN

3-540-58878-7]. Hier findet sich, was bei Großmann fehlt – nämlich Arithmetik und Analysis im Komplexen.

- Klaus Jänich “Vektoranalysis”, 2. Auflage, Springer 1993 [ISBN 3-540-57142-6]. Das klingt wie div grad rot, ist aber eigentlich eine wunderschöne Einführung in die Differentialgeometrie. Hat einen Ehrenplatz auf meinem Regal. Brauchen Sie aber allenfalls im zweiten Teil (Sommersmester).

1.3 Logik für Laien

Die Sprache der Physik ist die Mathematik. Und die Sprache der Mathematik . . . ist die **Logik**. Aber keine Angst – Sie müssen jetzt nicht erst ein umfangreiches Logikstudium absolvieren bevor Sie auf die Mathematik losgelassen werden können. Ein paar einfache logische Sachverhalte, die Ihrem nüchternen Menschenverstand zum Glück geläufig sind, reichen durchaus aus.

Jede **Aussage**, die sie in der Mathematik treffen, ist entweder **wahr** oder **falsch** – ein Drittes gibt es nicht , gebildet ausgedrückt **Tertium non datur**.[6] “Wahr” und “Falsch” sind die beiden möglichen **Wahrheitswerte** w und f einer Aussage. Die Aussage “Zwei mal Zwei ist Vier”, beispielsweise, ist wahr. Die Aussage “Fünf ist eine gerade Zahl” ist falsch. Ist eine Aussage A wahr, sagt man auch A sei richtig, oder A gelte. Ist A falsch, sagt man A sei unrichtig oder ungültig.

Hat man eine Aussage A, kann man daraus eine neue Aussage “A ist nicht wahr”

Die Wahrheitswerte von “und”, “oder” und “wenn – dann” fasst man gerne in einer sog. *Wahrheitswerttabelle* zusammen.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

[6] Bitte nicht “Wahr” und “Falsch” mit “Beweisbar” und “Ubeweisbar” verwechseln. In der Mathematik – das weiß man seit Gödel, Turing und anderen, sind durchaus Sätze vorstellbar, die unbeweisbar sind. Solche Sätze kann man dann für “wahr” erklären, oder auch als “falsch”. Je nach dem wie man hier verfährt, schaut man auf leicht unterschiedliche Axiomensysteme. Wenn es um ihre Bedeutung für die Physik geht, spielen diese Unterschiede aber zum Glück keine Rolle.

bilden, genannt die **Negation** von A, kryptisch notiert $\neg A$. Die Aussage $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Hat man zwei Aussagen A und B, ist auch "A und B" eine Aussage, genannt **Konjunktion**, notiert $A \wedge B$. Wahr ist die Konjunktion dann und nur dann, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Die Aussage "A oder B" nennt man eine **Disjunktion**, auch **Alternative**, notiert $A \vee B$.[7] Die Disjunktion ist dann und nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Achtung! Im Gegensatz um landläufigen Sprachgebrauch ist "oder" hier nicht im ausschließenden Sinne von "entweder – oder" gemeint.[8] In jedem Fall gilt immer $A \vee \neg A$. Die Aussage "Sein oder nicht sein" ist eben keine Frage, wie bei Shakespeare, sondern als 'Tertium non datur' eine ewige Wahrheit.[9]

Die Aussage "Wenn A gilt, dann gilt B", auch gelesen "aus A folgt B" und notiert $A \Rightarrow B$ nennt man eine **Implikation**. Die Implikation kann mit den bereits vereinbarten Junktoren $\wedge$ und $\vee$ definiert werden

$$(A \Rightarrow B) := (\neg A) \vee B\,. \tag{1.2}$$

Das hier neu eingeführte Zeichen := kürzt übrigens das umgangssprachliche "steht für" ab.[10] In $a := b$ sagt man dann auch "a ist definitionsgemäß gleich b". Das "a"

[7] Kann man sich merken: Lateinisch "vel" heißt auf deutsch "oder". Und also kann man sich auch merken, dass dass andere Symbol $\wedge$ für "und" steht.

[8] "Entweder A oder B" nennt man eine **Kontravalenz**, auch **exklusives oder**. Die Kontravalenz ist genau dann falsch, wenn der Wahrheitswert von A der gleiche wie der Wahrheitswert von B.

[9] zumindest in der mathematischen Logik. In der Physik gibt es Schrödingers Katze. Und die kann – in einem metaphorischen Sinne – sowohl "sein" als auch " nicht sein". Die Metaphorik bezieht sich dabei auf den sog. *Überlagerungszustand* eines Ensembles gleichartig präparierter Katzen, und eben nicht auf eine individuelle Katze. Mehr dazu in der Quantenmechanik-Vorlesung ...

[10] Witzbolde dürfen auch sagen *Das Zeichen := steht für "steht für"*.

nennt man dann das **Definiens**, das "b" das **Definiendum**. Defintionsgleichungen wie (1.2) sind immer wahr – sie sind nicht beweisbedürftig. Im Gegensatz dazu ist die behaupte Gleichheit in $a = b$ durchaus beweisbedürftig – die Aussage $a = b$ könnte ja auch falsch sein. Die Gleichung $2 = 3$, beispielsweise, ist – wie Sie wissen – im Rahmen der üblichen Arithmetik schlicht falsch.[11]

Mit Hilfe der Wahrheitswerttabellen für $\neg$ und $\vee$ beweist man schnell, dass $A \Rightarrow B$ nur dann falsch ist, wenn B falsch, aber A wahr, in allen anderen Fällen aber wahr. Für die noch zu besprechende Kunst des logischen Schließens bedeutet das, dass aus einer wahren Aussage keine falsche Aussage abgeleitet werden kann. Allerdings kann aus einer falschen Aussage jede Aussage abgeleitet werden, ob nun wahr oder falsch. Gebildet sagt man *Ex falso quodlibet*.[12]

Impliziert eine Aussage A eine Aussage B, und impliziert andererseits die Aussage B auch die Aussage A, sagt man A und B seien äquivalent. Definiert ist die **Äquivalenz**

$$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)\,. \tag{1.3}$$

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist offenbar genau dann wahr, wenn sich die Wahrheitswerte von A und B gleichen, d.h. wenn beide wahr, oder wenn beide falsch sind.

Mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen beweist man, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn die Aussage $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ wahr ist (sog. **Kontraposition**). Mittels Äquivalenz lässt sich das Gesagt auch als Formel formulieren,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.4}$$

In der Implikation $A \Rightarrow B$ ist B **notwendige** Bedingung für A, und A ist **hinreichende** Bedingung für B. Achtung! Es ist durchaus möglich, dass die Implikation

[11] Wenn Sie nun definieren $2 := 3$, befindet sich das damit von Ihnen formulierte Axiom im Widerspruch zum Axiomensystem der handselsüblichen Arithmetik. Das Gesatmsystem ist dann nicht widerspruchsfrei und also als mathematisches Axiomensystem nicht geeignet.

[12] genau gesagt: *Ex falso sequitur quodlibet* – aus Falschem folgt Beliebiges.

$A \Rightarrow B$ wahr, obwohl A falsch! Sei beispielsweise A die Aussage "Es regnet." und B die Aussage "Es stehen Wolken am Himmel." Die Implikation $A \Rightarrow B$ bedeutet nun die Weisheit "Wenn es regnet, dann stehen Wolken am Himmel.", die Kontraposition bedeutet "Wenn keine Wolken am Himmel stehen, regnet es nicht". Allerdings kann es durchaus sein, dass es nicht regnet – A also falsch – obwohl Wolken am Himmel stehen, d.h. B zutreffend.

Die Aussage "$(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow C)$" impliziert die Aussage $A \Rightarrow C$, in Formeln

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\,. \tag{1.5}$$

was anhand der Wahrheitswerttabelle unschwer verifiziert werden kann. Für mathematische Beweise ist dieses Zerlegen eines großen Schrittes (von A nach C) in kleinere Schritte (zunächst von A nach B, dann von B nach C) von unschätzbarem Wert.

Bekanntlich gibt es Äpfel, Stühle und ungerade Zahlen. Ist ein gegebenes Ding x nun ein Apfel sagt man x gehöre zur Apfelkollektion, notiert $x \in X$, wobei mit X die Gesamtheit aller Äpfel gemeint ist. Ist x kein Apfel schreibt man $x \notin X$. Unter den Äpfeln gibt es solche die süß sind, und solche die rot sind. "Süß sein" und "Rot sein" sind jeweils eine **Eigenschaft**, nennen wir sie kurz S und R. Hat man nun einen Apfel x, ist $S(x)$ gleichbedeutende mit der Aussage "x ist süß". Die Kollektion aller süßen Äpfel notier man dann $\{x \in X|S(x)\}$ (lies: die Gesamtheit aller Dinge aus dem Apfelkollektiv (vor dem Trensstrich) die süß sind (nach dem Trennstrich)). Sie dürfen hier S ruhig als Funktion sehen: Defintionsberich wären alle Äpfel, Wertebereich die beiden Wahrheitswerte w und f.

Aussagen wie "Alle Menschen sind sterblich" können mit Hilfe des sog. **Allquantors** prägnant formuliert werden: $\forall x \in M : S(x)$, worin M die Menge aller Menschen, und $S(a)$ die Aussage "a ist sterblich". Aussagen wie "Es fährt ein Zug nach Nirgendwo" können mit dem **Existenzquantor** prägnant formuliert werden: $\exists x \in Z : N(x)$, worin Z die Menge aller Züge, und $N(a)$ die Aussage "Der Zug a fährt nach Nirgendwo".

In den seltensten Fällen weiß man von vorneherein, ob eine gegebene Aussage wahr ist oder nicht. Wesentlich häufiger möchte man die Wahrheit einer Aussage beweisen. Beweisen ist eine Argumentationstechnik, die einem strikten Regelwerk unterworfen ist – etwa den **Regeln des natürlichen Schließens**. Ausgehend von bereits als gültig erkannten Aussagen gestatten solche Regeln die Bildung neuer gültiger Aussagen. Für eine gegebene Funktion $f(x)$ möchte man beispielsweise beweisen, dass ihre Ableitung an einer gegebenen Stelle x_0 verschwindet ($f'(x_0) = 0$ sei im Folgenden die Aussage B genannt). Wir stellen uns vor, dass die Funktion so furchtbar kompliziert ist, dass man sie nicht einfach ableiten kann um $f'(x_0)$ ausrechnen, dass aber mit vertretbarem Aufwand festgestellt werden kann, dass f bei x_0 ein lokales Maximum aufweist (im Folgenden die Aussage A genannt). In diesem Fall kann der Beweis der Aussage "$f'(x_0) = 0$" nach folgendem Schema geführt werden: "$A \to B$ ist wahr. A wahr. Daher ist B wahr!". In der Formelsprache des natürlichen Schließens liest sich das

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \tag{1.6}$$

genannt der **Modus Ponens**,[13] auch Abtrennungsregel. Der Modus Ponens ist die Grundform des sog. **direkten Beweises**. Grundformen des **indirekten Beweises** sind der **Modus tollendo tollens**[14]

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A} \tag{1.7}$$

und die **reductio ad absurdum**

$$\frac{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)}{A} \tag{1.8}$$

Hier stehen jeweils über dem Querstrich gültige Aussagen, mit deren Hilfe auf die Gültigkeit der Aussage unter dem Querstrich geschlossen wird. Für weitere Regeln

[13] genauer: Modus ponendo ponens – das zu Setzende setzend.

[14] lat. das Aufzuhebende aufhebend

– es sind insgesamt nur eine handvoll Grundregeln – sei auf Mathebücher o.ä. verwiesen (auch Wikipedia kann hier konsultiert werden).

1.4 Umgang mit Gleichungen, Terme, Äquivalenzumformungen

Einen Ausdruck der Form $1+2\cdot 3$ ist keine Aussage, sondern ein **Term**. Ein Ausdruck der Form 1+ ist kein Term. Ein Term ist ein Ausdruck, der eine Zahl (oder ein anderes mathematisches Objekt) benennt. Der Ausdruck $1+2\cdot 3$ ist ein Term, weil er die Zahl 7 benennt. Keine Ahnung, welche Zahl der Ausdruck 1+ benennt. Daher ist 1+ auch kein Term (sondern möglicherweise die Note für eine besonders gute Leistung).

Einen Ausdruck der Form

$$1+2\cdot 3=\frac{4\cdot 5-6}{2} \tag{1.9}$$

nennt man eine **Gleichung**. Eine Gleichung ist eine Aussage. Auch $1=2$ ist eine Gleichung, nur dass diese Gleichung eine falsche Aussage, im Gegensatz zur Gleichung (1.9), die eine wahre Aussage darstellt. In der Mathematik beschränkt man sich im Allgemeinen darauf, nur wahre Aussagen hinzuschreiben, $2=1$ werden sie selten sehen, allenfalls gegen Ende eines indirekten Beweises.

Eine Gleichung hat eine linke Seite und eine rechte Seite. Beide Seiten haben notwendig die Form von Termen. Eine Gleichung behauptet, dass die Zahl (bzw. das mathematische Objekt), die der Term auf der linken Seite benennt die gleiche Zahl (bzw. das mathematische Objekt) ist, wie die Zahl (bzw. das mathematische Objekt), die der Term auf der rechten Seite benennt. So einfach ist das.

Dass Gleichung (1.9) ein wahre Aussage darstellt, kurz gesagt “dass Gleichung (1.9) wahr ist", ist durchaus beweisbedürftig. Der Beweis kann in diesem Fall durch sog. **Äquivalenzumformungen** geführt werden, an deren Enden (hoffentlich) eine Trivialität wie beispielsweise $1 = 1$ (oder $0 = 0$, oder $17 = 17$ etc.) steht. Um die Übersicht nicht zu verlieren ("Häh? Wie kommt'n der jetzt darauf?") kann – und sollte – man die jeweilige Umformung durch einen sog. *Auftragsstrich* protokollieren. Etwa so[15]

$$
\begin{aligned}
1 + 2 \cdot 3 &= \tfrac{4 \cdot 5 - 6}{2} && |\cdot 2 \text{ (beide Seiten "mit 2 malnehmen")} \\
2 \cdot (1 + 2 \cdot 3) &= 4 \cdot 5 - 6 && |\text{links: Assoziativgesetz; rechts: } 4 \cdot 5 = 20 \\
2 + 4 \cdot 3 &= 20 - 6 && |\text{links: } 4 \cdot 3 = 12\text{; rechts: } 20 - 6 = 14 \\
2 + 12 &= 14 && |\text{links: } 2 + 12 = 14 \\
14 &= 14 && |\div 14 \text{ (beide Seiten "durch 14 teilen")} \\
1 &= 1 && \text{(Uff!)}
\end{aligned}
$$

Versteht sich, dass mit zunehmender Übung, die Dichte an Auftragsstrichen abnimmt – man muss ja nicht jede Banalität protokollieren. Aber dem Novizen sei geraten, Auftragsstriche ernst zu nehmen. Er kann dann nämlich besser nachvollziehen, wo sich sein Denkfehler eingeschlichen hat (wenn er denn Denkfehler macht).

Eine wichtige Form von Äquivalenzumformung ist die **Termvereinfachung**. Termvereinfachung ist beispielsweise $2 \cdot (1 + 2 \cdot 3) = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 + 12 = 14$. Aber auch $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$ ist Termvereinfachung. Unter einer Termvereinfachung ändert sich der Zahlenwert des Terms nicht. An dieser Stelle eine groß Bitte:

Machen Sie um Himmels Willen bloß nicht den Fehler, sofort alles mit dem Taschenrechner (oder sonstwie) in Dezimalzahlen auszudrücken! Bleiben Sie solange irgend möglich bei den Brüchen. Erst ganz am Schluss können Sie, wenn Sie denn unbedingt wollen, $\frac{13}{6}$ als Dezimalzahl schreiben, $\frac{13}{6} = 2,166\ldots$.

Die andere wichtige Form von Äquivalenzumformung involviert das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren der beiden Seiten (=Terme) einer Gleichung

[15] Das Assoziativgesetz wird in 3.1 noch einmal rekapituliert ...

mit irgendwelchen, möglichst geschickt gewählten Zahlen. Hat man beispielsweise eine Gleichung $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, erzeugt Multiplikation mit 2 die Gleichung $3 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}$. Der Wert der linken Seite hat sich dabei geänder (von $\frac{3}{2}$ nach 3), ebenso der Wert der rechten Seite (von $1+\frac{1}{2}$ nach $2+2\cdot\frac{1}{2}$), aber der Wahrheitswert der Gleichung hat sich nicht geändert (von "wahr" nach "wahr"). Addieren etc. dürfen Sie übrigens auch ganze Gleichungen, vorausgesetzt, Sie haben deren Wahrheit schon anderweitig etabliert.

Das Gesagte läßt sich problemlos auf die **Buchstabenrechnung** übertragen. Buchstaben stehen für Zahlen, der Term $2 \cdot b$ für das Doppelte der Zahl b, bzw. – dem Kommutativgesetz der Multiplikation sei Dank – für das b-fache der Zahl 2. Wer es genau nehmen möchte, nennt $2 \cdot b$ einen **ungesättigten Term**. Offen bleibt hier der Zahlenwert des Terms – schließlich kennt man ja den Zahlenwert von b an dieser Stelle nicht (und braucht ihn auch nicht zu kennen).

Zuweilen stößt man auf eine Gleichung der Form $x \cdot a = 2 \cdot b$, im Anschluss an das gerade gesagte bezeichnet eine *ungesättigte Aussage*, wobei nach der Lösung dieser Gleichung gefragt wird. Ohne es dazuzusagen, meint man mit "die Lösung" denjenigen Wert der **Unbekannten** x, der bei gegebenen **Parametern** a, b die ungesättigte Aussage zu einer wahren Aussage macht. Äquivalenzumformungen erfordern dann eine gewisse Sorgfalt – also nicht einfach "durch a teilen", denn was wäre denn, wenn $a = 0$? Durch Null darf man schließlich nicht teilen (durch Null teilen ist *keine* Äquivalenzumformung), man muss also den Fall $a = 0$ gesondert behandeln.

Man wird dann feststellen, dass die Gleichung $x \cdot a = 2 \cdot b$ im Falle $a = 0$ für $b \neq 0$ überhaupt keine Lösung hat, dass es also keinen Wert für x gibt, für den die Gleichung eine wahre Aussage. Man sagt dann, die Lösungsmenge der Gleichung $x \cdot a = 2 \cdot b$ sei im Falle $a = 0$, $b \neq 0$, die leere Menge. Im Falle $a = 0$, $b = 0$ hingegen besteht die Lösungsmenge aus der Menge aller Zahlen. Nur im Falle $a \neq 0$ umfasst die Lösungsmenge genau eine Zahl. Statt umständlich zu formulieren "$\{\frac{2\cdot b}{a}\}$ ist die

Lösungmenge der Gleichung $x \cdot a = 2 \cdot b$ im Falle $a \neq 0$" kürzt man die Prosa etwas ab, und sagt "$x = \frac{2 \cdot b}{a}$ ist die Lösung der Gleichung $x \cdot a = 2 \cdot b$" (wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dass $a \neq 0$).

1.5 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Einen Beweis mittels Äquivalenzumformungen ist der Form nach ein direkter Beweis. Immer wenn Sie etwas nachrechnen oder ausrechnen führen Sie einen solchen Beweis. In der "reinen Mathematik" ist der Beweis mittels Äquivalenzumformungen aber eher selten anzutreffen.

Betrachte etwa die Aussage

$$E(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{1.10}$$

Für $n = 1$ stimmt diese Aussage offensichtlich, "$E(1)$ ist wahr". Wie aber kann man beweisen, dass $E(n)$ *für alle* natürlichen Zahlen eine wahre Aussage?[16]

Das Beweisprinzip der volständigen Induktion: Sei zu jeder natürlichen Zahl n eine Aussage $A(n)$ gegeben. Dann sind alle Aussagen $A(n)$ wahr, wenn man beweisen kann

1. $A(1)$ ist richtig (sog. **Induktionsanfang**).
2. Für jedes n, für welches $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig (sog. **Induktionsschluss**).

[16] Einer Anekdote zufolge hat Gauss als junger Schüler die Wahrheit von $E(100)$ durch Umordnung der Reihe, $1+2+3+\ldots+100 = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51) = 50 \cdot 101 = \frac{100 \cdot 101}{2}$ bewiesen.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion folgt unmittelbar aus dem Induktionsaxiom das bei einer systematischen Einführung der natürlichen Zahlen formuliert wird.

Im vorliegenden Fall wurde schon erkannt, dass $E(1)$ legitimer Induktionsanfang. Der Schluss von $E(n)$ nach $E(n+1)$ wird nun durch folgende kleine Rechnung vollzogen, wobei an der Stelle $*$ die Aussage $E(n)$ als Induktionsvoraussetzung herangezogen wird:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) \stackrel{*}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \,. \quad (1.11)$$

Damit ist $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ für alle n eine wahre Aussage. Weil aber schon $E(1)$ als wahr erkannt wurde, kann mit Modus Ponens auf $E(2)$ geschlossen weden, im Verbund mit der der Wahrheit von $E(2) \Rightarrow E(3)$ via Modus Ponens auf $E(3)$ und so weiter. M.a.W. $E(n)$ ist wahr für alle n. qed[17]

Neben dem Beweis durch Äquivalenzumformungen und dem Beweis mittels vollständiger Induktion gibt es noch den **Widerspruchsbeweis**, gebildet formuliert **reductio ad absurdum**. Der Widerspruchsbeweis ist eine beliebte Figur der mathematischen Beweisführung. Gute Gelegenheit also, Sie mit dieser Figur vertraut zu machen.

Dazu ein Beispiel das schon in Euklids Lehrbuch der Geometrie zu finden ist:

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Angenommen es gäbe nur k Primzahlen $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Dann wäre die Zahl $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$ entweder selber eine neue Primzahl $p > p_k$, oder sie wäre durch eine Primzahl p' teilbar, die allerdings auch neu sein müsste, da p durch die

[17] Das “qed”, was man zuweilen am Ende eines Beweises findet steht übrigens für “quod erat demonstraundum” – was zu beweisen war.

Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ nicht ohne Rest teilbar. In beiden Fällen befände man sich im Widerspruch zur Annahme, und da es mindestens eine Primzahl gibt, z.B. die Zahl 17, ist der einzige Schluss der bleibt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. qed