Kapitel 2

Mengen und Abbildungen

2.1 Mengen

Was eine Menge ist weiß man eigentlich schon. In den Worten von Georg Cantor[1]

> "Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die *Elemente* der Menge genannt werden – zu einem Ganzen."

Die Zugehörigkeit eines Dinges a zu einer Menge M notiert man

$$a \in M \tag{2.1}$$

und sagt "a ist **Element** von M". Gehört a nicht zu M schreibt man $a \notin M$.

[1] zitiert nach Jänich *Lineare Algebra*, S. 2

Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten,

$$A = B \quad \text{genau dann, wenn } \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,, \tag{2.2}$$

in der orthodoxen Mengelehre genannt **Extensionalitätsaxiom**.

Um eine Menge anzugeben kann man ihre Elemente zwischen zwei geschweiften Klammern auflisten, sog. **extensionale Schreibweise**. Beispielsweise

$$M = \{a, b, c\} \tag{2.3}$$

die Menge, die genau die Elemente a, b und c enthält. Auf die Reihenfolge in der Liste kommt es dabei nicht an, auch nicht ob einige Elemente vielleicht mehrfach aufgeführt werden, also

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{c, c, b, a, b\}\,. \tag{2.4}$$

Im übrigen muss man in der Klammernotation nicht unbedingt alle Elemente auflisten. Jeder gutwillige Leser wird schließlich $\{1, 2, \ldots, 10\}$ als $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ verstehen. Oder auch $\{2, 4, 6, \ldots\}$ als die Menge der positiven geraden Zahlen. Man nennt diese Schreibweise die **elliptische Schreibweise**. Schließlich kann man eine Menge auch durch eine Eigenschaft charakterisieren, die allen ihren Elementen zukommt. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ kann man beispielsweise auch so angeben: $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 3\}$, sog. **intensionale Schreibweise**.

Eine unverzichtbare Menge ist die **leere Menge** $\emptyset$. Ihr gehört kein Element an, was man in geschweifter Klammernotation gerne ausdrückt

$$\emptyset = \{\,\}\,. \tag{2.5}$$

Dem Extensionalitätsaxiom (2.2) sei Dank gibt es nur eine leere Menge: jede "andere" leere Menge enthielte dieselben Elemente, nämlich keine, wäre also gleich $\emptyset$.

Wichtige Mengen, die Ihnen vielleicht schon mal begegnet sind, sind

$$\mathbb{N} = \text{Menge der natürlichen Zahlen} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.6}$$
$$\mathbb{Z} = \text{Menge der ganzen Zahlen} = \{0, -1, +1, -2, +2, \ldots\} \tag{2.7}$$
$$\mathbb{Q} = \text{Menge der rationalen Zahlen} \tag{2.8}$$
$$\mathbb{R} = \text{Menge der reellen Zahlen} \tag{2.9}$$

Sagt man in der Mathematik "$\mathbb{Q}$" (oder $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ etc.) meint man aber eigentlich mehr als eine Menge von unterscheidbaren Dingern: man meint eigentlich eine Menge von unterscheidberen Dingern die sich in bestimmer Art und Weise (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) verknüpfen lassen ohne aus der genannten Menge zu fliegen.

Lassen sich für eine Menge alle Elemente – genügend Papier und Bleistift vorausgesetzt – extensional auflisten, hat die Menge also endlich viele Elemente, sagt man die Menge sei **endlich**. Eine Menge, die nicht endlich ist, ist schlicht **unendlich**. Die Menge $\{a, b, c\}$, beispielsweise, ist endlich. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind unendlich.[2]

Hat man zwei Mengen A, B, und ist jedes Element von A auch in B enthalten, sagt man A sei eine **Teilmenge** von B, notiert $A \subset B$, und nennt in diesem Zusammenhang B die **Obermenge** von A. Offensichtlich gilt, dass jede Menge Teilmenge von sich selbst, $M \subset M$. Außerdem wird postuliert, dass die leere Menge Teilmenge einer jeden Menge, $\emptyset \subset M$.

[2]Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie sich umkehrbar eindeutig auf eine Menge der Gestalt $\{1, 2, \ldots, n\}$ abbilden lässt. Die Zahl n ist dann wohlbestimmt, und man sagt M sei eine n-elementige Menge, bzw. die Mächtigkeit von M sei n. Eine Menge, die sich umkehrbar eindeutig auf $\mathbb{N}$ abbilden läßt, heißt abzählbar unendlich. Ihre Mächtigkeit, gebildet: Kardinalität, ist $\aleph_0$, gesprochen "Aleph-Null" (Aleph ist das erste Glyph im Hebräischen Alphabet). Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar unendlich ist, heißt überabzählbar.

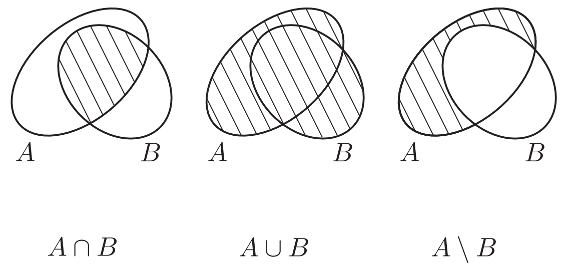

Abb 2.1 *Venn-Diagramme.*

Man kann alle möglichen Teilmengen einer Menge M zu einer eigenen Menge zusammenfassen, genannt die **Potenzmenge** von M, bezeichnet $\mathcal{P}(M)$. Definitionsgemäß sind die leere Menge und die Menge M selber Elemente von $\mathcal{P}(M)$. Beispiel $M = \{a, b, c\}$ Teilmengen sind die leere Menge $\emptyset$, die *Singletons* $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, die *Paarmengen* $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, und $\{a, b, c\}$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} . \tag{2.10}$$

Man beachte, dass nicht a ein Element von $\mathcal{P}(M)$, sondern die Menge(!) $\{a\}$. Als Elemente einer Menge kommen also auch Mengen in Frage – man lernt nie aus ...

Hat man zwei Mengen A, B, so bezeichnet

- der sog. **Durchschnitt** $A \cap B$ die Menge der Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind,
- die sog. **Vereinigung** $A \cup B$ die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind,
- die sog. **Differenz** $A \setminus B$ die Menge der Elemente, die zwar in A, nicht aber in B enthalten sind.

Zur Veranschaulichung von Teilmengen, Durchschnitt, Vereinigung und Differenz werden gerne sog. *Venn-Diagramme* herangezogen.

Häufig trifft man in der Mathematik auf das sog. **kartesische Produkt** zweier Mengen A und B, notiert $A \times B$, und meint damit die Menge der geordneten Paare

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A,\, b \in B\} . \tag{2.11}$$

Bei geordneten Paaren kommt es, im Unterschied zu Mengen, auf die Reihenfolge der Dinge an. Das Paar (a, b) ist also durchaus verschieden vom Paar (b, a) (es sei denn $a = b$): es gilt $(a, b) = (c, d)$ genau dann wenn $a = c$ und $b = d$.

©Martin Wilkens

Zur Veranschaulichung einer Produktmenge $A \times B$ kann ein Rechteck verwendet werden wobei A und B als horizontale und vertikale Strecken unter und neben dem Rechteck skizziert werden. Zu jedem $a \in A$ und $b \in B$ entspricht dann (a, b) genau einem Punkt in diesem Rechteck.

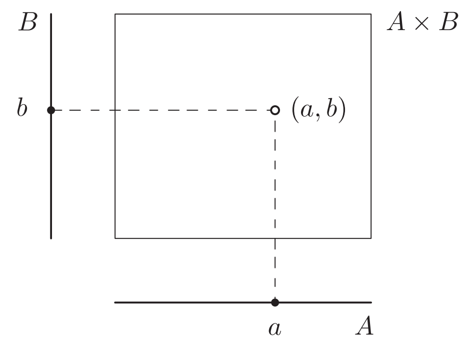

Abb 2.2 *Die Produktmenge $A \times B$ anschaulich.*

Handelt es sich speziell um die Mengen $A = B = \mathbb{R}$ verfährt man etwas anders. In Analogie zum **Zahlengerade**, die die Menge $\mathbb{R}$ illustriert, wird $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zur **Zahlenebene**. Um sich in der Zahlebene zu orientieren zeichnet man eine horzontale Gerade für die Untermenge $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}^2$, und eine vertikale Gerade für die Untermenge $\{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y)|y \in \mathbb{R}\}$. Der Schnittpunkt der beiden wird mit dem Elemet $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert. Ein beliebiges Element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann mittels $(x, 0)$ und $(0, y)$ lokalisiert werden, wie in der Abbildung angedeutet.

Analog sind höhere Produkte von Mengen erklärt. Sind etwa $A_1, \ldots, A_n$ Mengen, so heißt die Menge

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n)|a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\} \tag{2.12}$$

das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$.

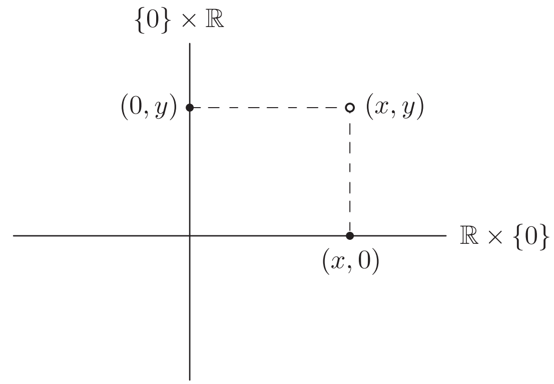

Abb 2.3 *Der Zahlenraum $\mathbb{R}^2$ anschaulich.*

Besonders häufig trifft man in der Mathematik auf den $\mathbb{R}^n$, das kartesische Produkt von n Faktoren $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} . \tag{2.13}$$

Der $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-**Tupel** reller Zahlen, $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Insbesondere der $\mathbb{R}^3$ spielt in der Physik eine wichtige Rolle. Zur Veranschaulichung zeichnet man, ähnlich wie beim $\mathbb{R}^2$, drei Geraden: die "X-Achse" $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, die "$Y$-Achse" $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ und die "Z-Achse" $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, und lokalisiert das Element $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ wie in der Abbildung angedeutet. Das sieht dann zwar so aus, als schaue man auf einen Ausschnitt des "physikalischen Raumes", ist aber nicht so

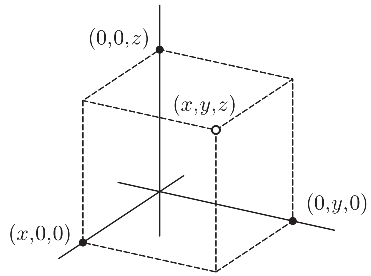

Abb 2.4 *Der Zahlenraum* $\mathbb{R}^3$ *anschaulich.*

gemeint. Gemeint is lediglich eine Illustration des **Zahlenraums** $\mathbb{R}^3$, nicht mehr aber auch nicht weniger.

2.2 Relationen

Seien X und Y zwei Mengen, und R Teilmenge ihres kartesischen Produkts, $R \subset X \times Y$. Für $(x, y) \in R$ sagt man x stünde in **Relation** R mit y, zuweilen notiert xRy.

Betrachte etwa die Menge $\mathbb{P}$ der Punkte und $\mathbb{G}$ der Geraden in der Ebene. Die Teilmenge $\mathbb{I} := \{(P, g)|\text{Der Punkt } P \in \mathbb{P} \text{ liegt auf der Geraden } g \in \mathbb{G}\} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ definiert eine bestimmte Relation zwischen Punkten und Geraden, genannt die *Inzidenzrelation*. Schaut man dann auf $Q\mathbb{I}h$ ist das nichts anderes als die Kurzform für die Aussage "Der Punkt Q liegt auf der Geraden h".

Häufig stößt man auf Relationen R zwischen den Elementen ein- und derselben Menge M, also $R \subset M \times M$. Man spricht dann von einer *Relation auf M*. Ist mit $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ heißt die Relation **symmetrisch**. Gilt $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$, so heißt die Relation **reflexiv**. Und ist mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ auch $(x, z) \in R$, so heißt die Relation **transitiv**. Eine Realtion die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennt eine **Äquivalenzrelation**. In diesem Fall heißen x und y aus $(x, y) \in R$ *äquivalent*, bzw. ausführlich "R-äquivalent", notiert $x \overset{R}{\sim} y$, oder auch einfach nur $x \sim y$. Beispielsweise konstituiert $\| := \{(g, h) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}|g \text{ parallel zu } h\}$ eine Äquivalenzrelation "parallel".

Eine Äquivalenzrelation R auf einer Menge M induziert immer auch eine Einteilung der Menge M in Klassen einander R-äquivalenter Elemente, genannt **Äquivalenz-**

 ©Martin Wilkens

klassen.[3]. Greift man sich irgendein a aus M, so ist $[a] := \{x \in M | x \overset{R}{\sim} a\}$ als Menge aller zu a äquivalenter Elemente von M eine Äquivalenzklasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen von M bezüglich einer Äquivalenzrelation $\overset{R}{\sim}$ notiert man

$$M/\overset{R}{\sim} := \{[x] \mid x \in M\}\,. \tag{2.14}$$

Offensichtlich ist $M/\overset{R}{\sim}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M, zuweilen genannt die **Restklassenmenge modulo** $\overset{R}{\sim}$.

Unter dem Schutz der Äquivalenzrelation kann jedes Element von $[a]$ herangezogen werden, als **Repräsentant** von $[a]$ zu fungieren

$$[a] = [b] \text{ genau dann, wenn } a \overset{R}{\sim} b \tag{2.15}$$

Eine Teilmenge von M, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein **Repräsentantensystem** von R in M. So ist beispielsweise jede Parallelenschar eine eigene $\|$-Äquivalenzklasse von $\mathbb{G}$, und die Menge aller Geraden durch einen festen Punkt $O \in \mathbb{P}$ ist ein Repräsentantensystem.

2.3 Ordnungsrelation, Schranken

Häufig lassen sich die Element einer Menge "nach Größe" ordnen – denken Sie nur an die diversen Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ etc. Eine **Ordnung** auf einer Menge M ist eine Relation, üblicherweise bezeichnet $\leq$, die reflexiv, transitiv aber nicht symmetrisch,

[3]Ein System von nichtleeren Teilmengen einer gegebenen Menge M das so beschaffen ist, dass jedes Element von M zu einer und nur einer Teilmenge des Systems gehört, nennt man eine *Klasseneinteilung* der Menge M. Die einzelnen Teilmengen nennt man *Klassen*

sondern antisymmetrisch ist, d.h.

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)\,. \tag{2.16}$$

Man vereinbart dann auch $x \geq y$ genau dann, wenn $y \leq x$, sowie $x < y$ wenn $x \leq y$ aber $x \neq y$, und $x > y$ genau dann wenn $y < x$. Gilt zudem für alle $x, y \in M$: $(x \leq y) \vee (y \leq x)$ heißt $\leq$ eine **totale Ordnung** auf M. Ist M total geordnet, gilt offensichtlich für zwei beliebige Elemente x, y genau eine der Beziehungen $x < y$, $x = y$ oder $x > y$.

Hat man eine geordnete Menge M, und eine nichtleere Teilmenge A von M, dann heißt A nach oben (bzw. unten) **beschränkt**, wenn es ein $s \in M$ gibt (die "Schranke"), so dass für alle $a \in A$ gilt $a \leq s$ (bzw. $s \leq a$). Ist A nach oben und nach unten beschränkt, heißt A schlicht beschränkt. Ist die Schranke s selber Element von A, so definiert sie das **Maximum** (bzw. **Minimum**) der Menge, bezeichnet $\max(A)$ (bzw. $\min(A)$). Zu beachten ist, dass es durchaus beschränkte Mengen gibt, die weder eine Maximum noch ein Minimum aufweisen. Beispielweise ist die Menge $I := \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\}$ in $\mathbb{R}$ von oben durch 2 und von unten durch 1 beschränkt, aber weder 2 noch 1 sind Element der Menge I. Für viele der geannnten Mengen lassen sich aber kleinste obere Schranken (oder eben größte untere Schranken) angeben, gepflegt genannt **Supremum** (bzw. **Infimum**),

$$\sup(A) := \min\{s \in M |\ s \text{ ist oberer Schranke von } A\}\,, \tag{2.17}$$
$$\inf(A) := \max\{s \in M |\ s \text{ ist untere Schranke von } A\}\,. \tag{2.18}$$

Im obigen Beispeil wäre 2 das Supremum, und 1 das Infimum von I in $\mathbb{R}$.

2.4 Abbildungen

Gilt für eine Relation $\Gamma_f \subset X \times Y$ dass wenn $(x, y) \in \Gamma_f$ und $(x, y') \in \Gamma_f$ dann $y = y'$, sagt man, Γ_f definiere eine **Abbildung** f aus der Menge X in die Menge Y. Statt $(x, y) \in \Gamma_f$ schreibt man $y = f(x)$, nennt y das **Bild** von x unter der Abbildung f, und x ein **Urbild** von y. Zu beachten ist hier, dass ein $y \in Y$ durchaus mehrere Urbilder haben kann, dass ein $x \in X$ höchstens ein Bild haben kann, dass aber nicht jedes $x \in X$ Urbild eines Elementes von Y sein muss. Sofern allerdings jedes Element von X Urbild eines Elementes von Y, heißt f eine Abbildung von X nach Y. Solcherart Abbildungen sind das Butterbrot der Mathematik, und die kann man auch direkt, d.h. ohne Bezug auf Relationen, einführen:

Definition "Abbildung" Seien X und Y Mengen. Eine Abbildung f von X nach Y ist eine Vorschrift, durch die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zugeordnet wird.[4]

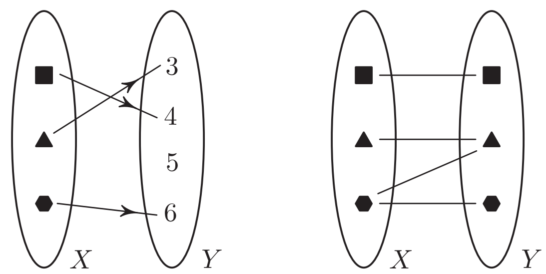

Abb 2.5 *Links: Eine Abbildung. Rechts: eine Relation aber* keine *Abbildung.*

Statt "f ist eine Abbildung von X nach Y" schreibt man kurz $f : X \to Y$, oder gar noch kürzer $X \xrightarrow{f} Y$. Die Zuordnung eines einzelnen Elements $x \in X$ zu seinem "Bildpunkt" $f(x)$ wird dann notiert, $x \mapsto f(x)$, wobei $f(x)$ hier gelesen wird "der Wert der Abbildung f an der Stelle x" (und *nicht* "die Abbildung f-von-x"!). Gebräuchlich ist auch die Notation $y = f(x)$, wobei das **Argument** x als **unabhängige** Variable bezeichnet wird, und y als die **abhängige** Variable. Die Menge X – in ihr "variiert" x – heißt der **Definitionsbereich** von f; die Menge der Bilder der Funktion f heißt der **Bidlbereich**, oder **Wertebereich** $f(X)$. Der Wertebereich ist offensichtlich immer einer Teilmenge des **Zielmenge** Y.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ kann man sich anhand ihres **Graphen** $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ veranschaulichen. Der Graph ist ja eine spezielle Teilmenge des kartesischen Pro-

[4]Wörtlich übernommen aus: Jänich, *Lineare Algebra*, p.8.

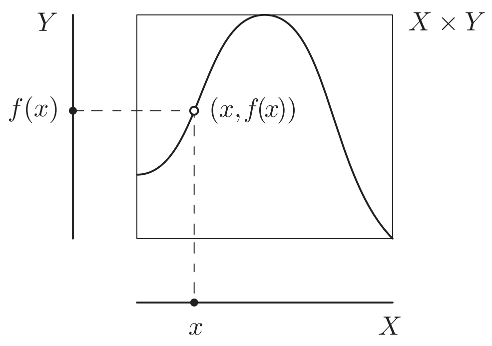

Abb 2.6 *Graph einer Abbildung. Die fragliche Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv.*

dukts $X \times Y$, und wie sich kartesische Produkte veranschaulichen lassen wurde oben schon erklärt.

Abbildungen, die einem immer wieder begegnet, sind die sog **Identität**,

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M : M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned} \tag{2.19}$$

die **konstante Abbildung**

$$\begin{aligned} X &\to Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

aber auch solch komplizierten Dinge wie die **Projektion** auf die erste Komponente

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 : A \times B &\to A \\ (a,b) &\mapsto a \end{aligned} \tag{2.21}$$

Die konstante Abbildung notiert man auch kurz und bündig $f = \text{const}$ (oder – ganz gebildet – $f = \text{constans}$).

Eine Abbildung mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ nennt man allgemein eine **Folge**, eine Abbildung mit Defintionsbereich $\subset \mathbb{R}$ nennt man eine **Funktion**, und ist der Definitionsbereich gar eine irgendwie geartete Menge von Funktionen nennt man die entsprechende Abbildung ein **Funktional**.[5]

Ausführlich notiert liest sich beispielsweise die Funktion, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuweist

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

[5]Ein Funktional ist beispielsweise die Abbildung $\int_a^b : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, die jeder reellen Funktion $f \in \mathcal{F}$ den Wert ihres Integrals $\int_a^b f(x)dx$ zuweist. Vergessen was ein Integral ist? Noch nie gehört? Macht nichts. Sie brauchen den Begriff an dieser Stelle nicht. Daher ist das Beispiel auch eine Fußnote. Und Fußnoten sind nicht klausurrelevant …

In der ersten Zeile wird der Name der Funktion festgelet, hier "q", und der Definitionsbereich X und der Zielbereich Y werden angegeben, hier $X = Y = \mathbb{R}$. In der zweiten Zeile wird gesagt, wie der Wert der Funktion für ein gegebenes Urbild $x \in \mathbb{R}$ zu berechnen ist. Damit weiß nun jeder, der die Zeichenkette x^2 dekodieren kann, was mit $q(2)$ gemeint ist – nämlich 2^2, und das ist bekanntlich gleich 4.

Folgen notiert man etwas anders. Statt ausführlich

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

schreibt man schlicht $a = (n^2)$, oder explizit $a = (1, 4, 9, 16, \ldots)$. Und statt $a(n)$ (der Wert der Folge a an der Stelle n) schreibt man a_n, genannt das n-te *Glied* der Folge, hier etwa$a_3 = 9$.

Beide, die Funktion q wie auch die Folge a involvieren die Operation "Quadrieren". Trotzdem sind es verschiedene Abbildungen: die eine ist definiert für alle reelle Zahlen, die andere ist definiert für alle natürliche Zahlen. Und da eine Abbildung nicht nur durch ihre Operationsvorschrift festgelegt ist, sondern der Definitionsbereich ganz wesentlich dazugehört, verdienen diese beiden Abbildungen auch unterschiedliche Namen.

Besonders eindrücklich gelingt die Veranschaulichung bei den Funktionen: man bestimmt ein paar Paare $(x_i, f(x_i))$, schreibt die in eine anständige Wertetabelle, überträgt die Paare in ein Koordinatensystem, wo sie zu lokalen Schwärzungen (=Punkte – aber nicht im mathematischen Sinne) werden, und verbindet die lokalen Schwärzungen irgendwie glatt mit dem Bleistift. Das Resultat ist eine Graphik – was die Kategorie "Funktionsgraph" aufs trefflichste rechtfertigt.[6] Die Graphik erinnert dann vielleicht an andere Graphiken, der Funktionsgraph von $f(x) = mx + b$ (mit m

[6] Kann man trefflich steigern?

und b irgendwelche Konstanten) vielleicht an das Bild einer Geraden g, und – Schwpus! – wird die genannte Abbildung f (Funktion) zu einem geometrischen Objekt g (Gerade). Nix gegen das Schwups! – solche Schwups sind wichtige Quellen von Inspiration. Aber eben leider auch Quelle von Konfusion: “das Quadrat einer Geraden ist irgendwie ’n Quadrat. Also ist f^2 irgendwie ’n Quadrat …oder so.” Nein – ist es nicht. Auch nicht irgendwie und oder so. “Funktion” und “Gerade” sind und bleiben verschiedene Kategorien. Dass sie zu ähnlichen Schaubildern Anlass geben ist interesssant, aber es erlaubt nicht, sie zu identifizieren.

Für $A \subset X$ und $B \subset Y$ heißt $f(A) := \{f(x)|x \in A\}$ die **Bildmenge** von A, und $f^{-1}(B) := \{x|f(x) \in B\}$ heißt die **Urbildmenge** von B. Man beachte, dass hier mit f^{-1} keineswegs die Existenz einer Umkehrabbildung insinuiert wird, sondern nur das, was mit $f^{-1}(B)$ gesagt wurde.

Abbildungen können verkettet bzw hintereinander geschaltet werden. Die Kette $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ definiert eine Abbildung von X nach Z, die man $g \circ f$ notiert,

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Zuweilen läßt man das Verknüpfungsziechn $\circ$ unter den Tisch fallen, schreibt statt $g \circ f$ einfach gf. Damit ist dann nicht “f mal g” gemeint, sondern “erst f anwenden, dann auf das Resultat g anwenden”. Bei Funktionen notieren wir die Verkettung aber ganz pedantisch mit dem Verknüpfungszeichen $\circ$ – schließlich wollen wir eine Verwechslung mit dem Produkt zweier Funktionen vermeiden.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

- **surjektiv** wenn jedes Element von Y Bild eines Elementes von X,[7]

[7] Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ nennt man auch Abbildung von$X$ auf Y.

- **injektiv** bzw. eineindeutig, wenn aus $f(x) = f(x')$ folgt dass $x = x'$.
- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Im Falle $X = Y$ nennt man eine bijektive Abbildung $\pi : X \to X$ auch eine **Permuation**. Permuationen spielen in der Kombinatorik eine wichtige Rolle.

Bijektive Abbildungen glänzen durch eine Eigenschaft – sie sind "umkehrbar". Die **Umkehrabbildung** eine bijektiven Abbildung $f : X \to Y$, in voller Schönheit notiert

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\to X \\ f(x) &\mapsto x \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei f^{-1} gelesen wird "f invers", keinsfalls aber als "eins-durch-f". Offensichtlich gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

Als Beispiel für diejenigen, die (spätestens) in der 10. Klasse die Funktion $x \mapsto= a^x$, worin a irgendeine feste reelle Zahl, kennengelernt haben, hier nun eine pedantische Variante für Ihre alte Bekannten nebst deren Umkehr:

Sei für festes $a \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{2.26}$$

Dann ist mit

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ a^x &\mapsto x \end{aligned} \tag{2.27}$$

die Umkehrabbildung von f_a verabredet, genannt **Logarithmus zur Basis** a. Man beachte hier die feinsinnge Bestimmung der Definitions- und Zielbereiche. Für f_a sind die reellen Zahlen Definitionsbereich, der Zielbereich besteht aber nur aus den positiven rellen Zahlen. Gut so. Denn der Logarithmus ist ja nur für die positiven reellen Zahlen verabredet, nimmt aber glücklicherweise Werte in allen reellen Zahlen

. . . .

Schnödel-Trödel. Dass hier $\log_a \circ f_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ steht, sieht ja wohl jedes Kind. Aber was ist mit $f_a \circ \log_a$, ausgeschrieben $x \mapsto f_a(\log_a(x))$ (wenn ich 'ne Funktion hab', dann muss doch irgendwo 'n x auftauchen). Kein Problem: Namen (von Variable) sind Schall und Rauch. Here we go: Sei $x = a^y$, mit y irgendeine (durch a und x bestimmte) reelle Zahl. Dann ist x notwendig positiv. Somit ist $\log_a(x)$ definit, $= \log_a(a^y) = y$, und das ist eine irgendeine positive oder negative reelle Zahl. Dann aber ist $f_a(y) = a^y = x$. Kurz $f_a \circ \log_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$.

©Martin Wilkens