Kapitel 3

Arithmetik

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und ihren Verknüpfungen. Vergessen, was Zahlen sind und was man mit denen alles so machen kann? Macht nichts. Die folgenden Abschnitte sind als kleine Erinnerungshilfe gedacht.

Ach übrigens – verwechseln Sie bitte nicht Zahl mit Ziffer. Eine Zahl ist ein mathematischen Ding, dessen Eigenschaften in einem Axiomensystem oder ähnlichem festgelegt werden. Eine Symbolsequenz wie 123 ist zunächst lediglich eine *Ziffer* (arabisch: sifr). Im *Dezimalsystem*, auch genannt das *dekadische* System, steht diese Ziffer für den einhundertdreiundzwanzigsten Nachfolger des Neutralelements der Addition, das üblicherweise mit 0 bezeichnet wird. Im *dyadischen System*, auch genannt *duales System*, wäre diese Zahl durch die Ziffer 1111011 dargestellt, worin 0 wie gehabt die Ziffer für das Neutralelement der Addition, und 1 die Ziffer für den Nachfolger von 0. Man kann also Zahlen ganz unterschiedlich darstellen. Sofern nicht ausdrücklich vermerkt, werden Zahlen in dieser Vorlesung im Dezimalsystem dargestellt wobei wir für die sog. *Grundperiode* unseres Systems die arabischen Zif-

Der einhundertdreiundzwanzigste Nachfolger der Null im dekadischen System (Ziffern der Grundperiode $\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots, \mathtt{9}$)

$$\mathtt{1} \cdot 10^2 + \mathtt{2} \cdot 10^1 + \mathtt{3} \cdot 10^0 = \mathtt{123} \qquad (3.1)$$

und im dyadischern System (Ziffern der Grundperiode $\mathtt{0}, \mathtt{1}$)

$$\begin{aligned} \mathtt{1} \cdot 2^6 \quad &+ \quad \mathtt{1} \cdot 2^5 + \mathtt{1} \cdot 2^4 + \mathtt{1} \cdot 2^3 + \mathtt{0} \cdot 2^2 \\ &+ \quad \mathtt{1} \cdot 2^1 + \mathtt{1} \cdot 2^0 = \mathtt{1111011} \qquad (3.2) \end{aligned}$$

und im Hexadezimalsystem (Ziffern der Grundperiode $\mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}, \mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}$)

$$\mathtt{7} \cdot 16^1 + \mathtt{B} \cdot 16^0 = \mathtt{7B} \qquad (3.3)$$

fern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ verwenden, wobei 1 der Nachfolger von 0, 2 der Nachfolger von 1, ..., 9 der Nachfolger von 8. Der Nachfolger von 9 – die Zahl $9 + 1$ – wird mit der Ziffer 10 bezeichnet, der Nachfolger von 99 mit der Ziffer 100 und so weiter. Alles klar? Na dann mal los ...

3.1 Die rationalen Zahlen und die Axiome des Körpers

Schon früh haben Sie – und die Menschheit – mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots$ gelernt zu zählen. Aber erst Mitte des 19 Jhdts hat uns die Mathematik einen präzisen Begriff dieser Zahlen geliefert. Demnach handelt es sich bei $1, 2, 3, \dots$ um Elemente einer gewissen Menge $\mathbb{N}$, die dadurch charakterisiert ist, dass jedes Element von $\mathbb{N}$ einen und nur einen Nachfolger in $\mathbb{N}$ hat, und – mit Ausnahme eines ausgezeichneten "Startelements" – selber Nachfolger genau einen Elements ist. Die so bestimmte Menge nennt man die Menge der natürlichen Zahlen, häufig notiert in der Form[1]

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} . \tag{3.4}$$

Statt über das Abzählen können natürliche Zahlen auch über die Größenbestimmung von Mengen eingeführt werden. Demnach steht 1 für die Kollektion aller Mengen, die genau ein Element haben (also Korb mit einem Apfel, Korb mit einer Birne usw), und 2 für die Kollektion derjenigen Mengen, die zwei Elemente haben

[1] Zuweilen wird $\mathbb{N}$ unter Einbeziehung der "Null" definiert, und die in (3.4) angegebenen Menge wird mit $\mathbb{N}^*$ bezeichnet. Wir bleiben bei unserer Bezeichnung, und notieren – sofern nötig – die Menge $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ mit dem Symbol $\mathbb{N}_0$. Der Grund für unseren Starrsinn: die Null ist keine Abzählzahl, und im Anhang werden die natürlichen Zahlen axiomatisch über die Kunst des Abzählens eingeführt.

usw. Die Abzählzahlen nennt man in diesem Zusammenhang **Ordinalzahlen**, die "Mengengrößenzahlen" nennt man **Kardinalzahlen**.[2]

Mit natürlichen Zahlen lässt sich aber nicht nur zählen, sondern auch rechnen. Insbesondere lassen sich zwei natürliche Zahlen addieren oder multiplizieren, ohne dabei den **Zahlbereich** der natürlichen Zahlen zu verlassen. Die Ihnen vertraute Subtraktion ist allerdings nicht für alle natürlichen Zahlen erklärt – was wäre denn die Zahl "Eins vermindert um Zwei"? Hier hilft eine sog. **Zahlbereichserweiterung** der natürlichen Zahlen zu den **ganzen Zahlen** weiter, häufig notiert

$$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\} . \tag{3.7}$$

Als neue Spieler treten hier die Null und die negativen Zahlen (das sind die mit dem vorangestellten Symbol $-$, lies "minus") in Erscheinung. Die Null ist eine der genialsten Erfindungen der Menschheit,[3] die negativen Zahlen waren bis in Descartes Zeiten schlicht ein Unding – man konnte sich unter ihnen nichts rechtes vorstellen.

In der Menge der ganzen Zahlen kann nun auch subtrahiert werden, ohne aus der Menge zu fliegen. Allerdings ist Division nach wie vor nur eingeschränkt möglich – was wäre denn "Zwei geteilt durch Drei"?

Um hier weiter zu kommen wird die Menge der ganzen Zahlen zur Menge der **ra-**

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl n kürzt man in der Notation ab,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \tag{3.5}$$

genannt n-**Fakultät**, und vereinbart $0! := 1$. Die Fakultät spielt eine große Rolle in der sog. **Kombinatorik**. Die Zahl $n!$ ist genau die Zahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte in einer Reihe anzuordnen (äquivalent: Die Zahl $n!$ ist die Anzahl der Permutationen n verschiedener Elemente).
Kombinatorisch auch bedeutsam die sog. **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} . \tag{3.6}$$

Die Zahl $\binom{n}{k}$ ist genau die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nicht leeren Menge mit n Elementen (Beweis: Übung). Man beachte, dass es sich trotz des Bruchstrichs bei einem Binomialkoeffizienten immer um eine natürliche Zahl handelt.

[2] Treten zu einem Wettlauf drei Teilnehmer an, nämlich Adelheid, Berta und Carl, könnten beispielsweise Berta als Erste, Carl als Zweiter, und Adelheid als Dritte ins Ziel kommen. Die "drei" im letzten Satz bezeichnet dann den Umfang der Teilnehmermenge, wäre also eine Kardinalzahl, während "Erster", "Zweiter" und "Dritter" als Ordinalzahlen fungieren. Haben alle Teilnehmer das Ziel erreicht, wäre also die Teilnehmermenge mit Hilfe der Ordinalzahlen struktuiert, stünde mit Vergabe des Prädiakts "die Dritte" damit auch die Gesamtzahl der Teilnehmer fest (nämlich "drei"). Kurz: endliche Ordinalzahlen und Kardinalzahlen dürfen getrost identifiziert werden.

[3] Wunderbar das Buch *The Nothing That Is* von Robert Kaplan (Penguin 1999), der deutsche Titel *Die Geschichte der Null* (Campus 2001) eine ziemlich bräsige Übersetzung des Originaltitels.

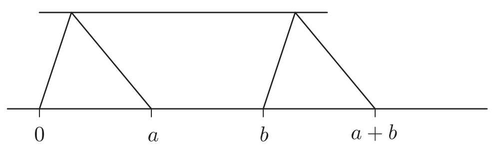

Abb 3.1 *Addition – the Pythagoreen style (via Parallelverschiebung).*

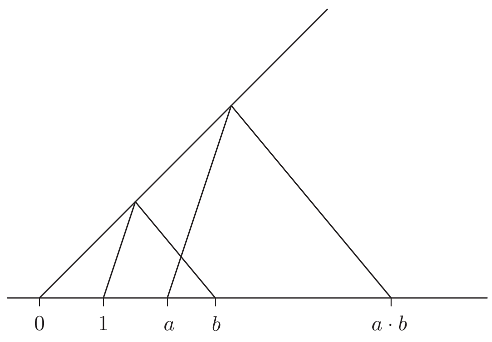

Abb 3.2 *Multiplikation – the Pythagoreen style (via Strahlensätze).*

tionalen Zahlen erweitert,

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} . \tag{3.8}$$

Im Sinne der Pythagoräer ist eine rationale Zahl nichts anderes als eine Proportion – das Verhältnis zweier kommensurabler Strecken, also das Verhältnis zweier Strecken, die ein gemeinsames Maß aufweisen. Wählt man als Maß beispielsweise “Am Dödel”, so verhielten sich zwei Dödel zu vierzehn Dödel wie ein Dödel zu sieben Dödel. In der heutzutage gebräuchlichen Notation $\frac{1}{7} = \frac{2}{14}$ – kurz $\frac{1}{7}$ und $\frac{2}{14}$ repräsentieren die gleiche rationale Zahl. Verallgemeinert schaut man hier auf die **Kürzungsregel**

$$\frac{k \cdot p}{k \cdot q} = \frac{p}{q} , \tag{3.9}$$

von rechts nach links gelesen genannt **Erweiterungsregel**. Die Zahl p über dem **Bruchstrich** - nennt man den **Zähler**, die Zahl q unter dem Bruchstrich den **Nenner** des Bruchs $\frac{p}{q}$. Einen Bruch der Form $\frac{1}{q}$ nennt man einen **Stammbruch**. Einen Bruch der Form $\frac{p}{1}$ identifiziert man mit der Zahl p, also $\frac{p}{1} = p$, und das bedeutet, dass die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} . \tag{3.10}$$

In den rationalen Zahlen stehen alle **vier Grundrechenarten** uneingeschränkt zur Verfügung. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von rationalen Zahlen sind in der Bruchdarstellung definiert (p, q, r, s sind ganz Zahlen)

$$\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} := \frac{p \cdot s \pm r \cdot q}{q \cdot s} \tag{3.11}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p \cdot r}{q \cdot s} , \tag{3.12}$$

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} := \frac{p \cdot s}{q \cdot r} , \tag{3.13}$$

wobei wir hier – wie im Folgenden – stillschweigend voraussetzen, dass die Nenner ungleich Null. Der Kürzungsregel sei Dank sind die Definitionen unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten, soll heißen statt p und q dürfen sie hier auch $k \cdot p$ und $k \cdot q$ sowie $n \cdot r$ und $n \cdot s$ verwenden, ohne die Gültigkeit zu beeinträchtigen.

Ein Zahlbereich für den alle vier Grundrechenarten uneingeschränkt zur Verfügung stehen, ist aus mathematischer Sicht ein Ding vom Typ "Körper".

Definition "Körper": Ein Körper besteht aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned} \tag{3.14}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned} \tag{3.15}$$

die folgenden Axiomen genügen

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. $a + b = b + a$
3. Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$
4. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-a \in \mathbb{K}$ mit $a + (-a) = 0$.
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. $a \cdot b = b \cdot a$
7. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$, $1 \neq 0$, mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$.
8. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a^{-1} \cdot a = 1$.
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

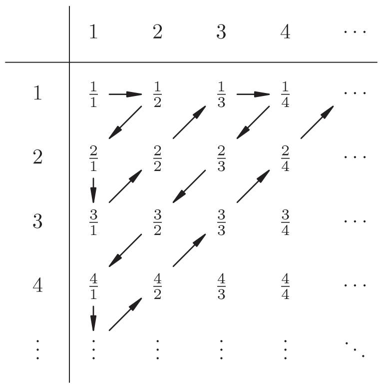

Abb 3.3 *Wie man die positiven rationalen Zahlen abzählt.*

Zugegebenermaßen etwas barock – aber so ist das halt, wenn man ein so mächtiges Werkzeug wie die Arithmetik einfangen will ...

Sie überzegen sich in einer stillen Minute, dass die rationalen Zahlen mit den in (3.11–3.13) angegebenen Rechenvorschriften den Körperaxiomen genügen. Man spricht daher auch gerne vom "Körper der rationalen Zahlen". Die natürlichen Zahlen oder die ganzen Zahlen bilden keinen Körper – schließlich kann man in ihnen nicht uneigeschränkt dividieren ("a geteilt durch b" wird in Körpersprache ausgedrückt "a mal b^{-1}").

Auch wenn Sie es nicht glauben wollen – die rationalen Zahlen sind abzählbar. Es gibt nämlich eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ – ein Umstand, auf den Cantor erstmals hingewiesen hat. Sie dürfen das auch so lesen: es gibt genau so viele natürliche Zahlen wie es rationale Zahlen gibt – nämlich $\aleph_0$ (Aleph-Null, Aleph ist das erste Glyph im Hebräischen Alphabet), die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$ (und $\mathbb{Q}$). Hatte ich schon erwähnt, dass es genau so viele gerade Zahlen gibt wie es natürliche Zahlen gibt? Genau so viele ganze Zahlen? Ungerade Zahlen? Zahlen die durch 17 teilbar sind?

Leider sind nicht alle Zahlen, die Sie aus der Schule kennen, rational. Im Gegenteil – die meisten sind irrational. Ein beliebtes Beispiel einer irrationalen Zahl ist die Zahl $\sqrt{2}$, die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat bzw. die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2 - 2 = 0\,. \tag{3.16}$$

Der Beweis , dass $\sqrt{2}$ nicht rational, ist ein Klassiker. Er findet sich schon ein Euklids "Elemente". Sei also a eine rationale Zahl mit $a^2 = 2$. Dann gibt es ganze Zahlen p und $q > 0$, ohne gemeinsamen Teiler, so dass $a = \frac{p}{q}$ mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ bzw. $p^2 = 2 \cdot q^2$. Folglich p^2 eine gerade Zahl, somit p einer gerade Zahl, $p = 2 \cdot r$, wo r eine ganze Zahl, und $q^2 = 2 \cdot r^2$. Entsprechend auch q eine gerade Zahl, somit p, q nicht teilerfremd, im Widerspruch zur Annahmen. qed

3.2 Die reellen Zahlen

Nun ist die Zahl $\sqrt{2}$ ist zwar nicht rational, ist aber mit einem Zirkel auf der Zahlengerade durchaus geometrisch konstruierbar. Andere Zahlen, wie beispielsweise π sind auch nicht rational, und sind noch nicht einmal geometrisch konstruierbar[4]

Mit Blick auf die Zahlengerade sagt man, $\mathbb{Q}$ sei dicht aber unvollständig. Die "Dichtheit" soll dabei bedeuten, dass zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b beliebig viele andere rationale Zahlen liegen, und mögen die beiden Zahlen a und b auf der Zahlengeraden noch so eng beieinander liegen. Zum Beweis nehme man doch einfach zwei verschiedene rationale Zahlen a und b, und bestimme deren Mittel $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Die Zahl c ist nun (1) auch rational, (2) liegt zwischen a und b, und ist (3) weder gleich a noch gleich b. Nun bestimme man das Mittel von, sagen wir a und c, oder c und b, und mache immer so weiter. Und weil "immer so weiter machen" kein Ende findet, befinden sich zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen beliebig viele (das ist höflich für "unendlich viele") andere rationale Zahlen.

Unvollständigkeit bedeutet, dass es Folgen rationaler Zahlen gibt, die zwar in sich konvergieren, deren Limes aber eine irrationale Zahl. Mein Lieblingsbeispiel in diesem Zusammenhang die Folge $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist a_n eine rationale Zahl, aber der Grenzwert – Eulers e – ist irrational, gar transzendent, $\lim_{n\to\infty} a_n = e \notin \mathbb{Q}$. Da Sie Folgen aber "offiziell" (d.h. im Rahmen dieses Kurses) noch gar nicht kennen, dürfen Sie das Beispiel auch gleich wieder vergessen, müssen mir dann aber einfach glauben, dass die rationalen Zahlen nicht vollständig sind.

Jede reelle Zahl x lässt sich mit rationalen Zahlen beliebig genau schachteln, soll heißen für jedes $\epsilon > 0$ lassen sich rationale Zahlen r, s angeben mit $r \leq x \leq s$ und $s - r < \epsilon$. Hat man Glück, und x ist selber rational, so wähle man doch einfach $r = s = x$, und fertig ist die Laube. Andernfalls fange man doch einfach bei irgend zwei rationalen Zahlen r und s an, die x umfassen. Man bestimme dann den Mittelpunkt $t = \frac{1}{2}(r+s)$ (auch eine rationale Zahl!), und schaue nach, ob x in der linken Hälfte lokalisiert ist, oder in der rechten Hälfte. Ist x in der linken (rechten) Hälfte lokalisiert, wiederhole man das ganze mit t anstelle s (t anstelle von r). So fährt man fort, bis $s-r$ kleiner ist als die vorgegebenen Genauigkeit ϵ.

[4]Achtung: der Kreisumfang eine Kreises mit Einheitsdurchmesser beträgt zwar π, aber dieses π lässt sich als Geradenstück mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren. Natürlich können Sie eine Kreisscheibe auf der Zahlengeraden abrollen lassen – womit Sie wüssten, wo ungefähr die Zahl π liegt – aber das ist halt keine geometrische sondern eine physikalische Konstruktion.

Vervollständigt werden die rationalen Zahlen durch eine Zahlbereichserweiterung in den **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Die Erweiterung ist etwas verwickelt, und wird daher auf die Ergänzungen verschoben. Dort lernt man dann, dass sich die reellen Zahlen als kleinste obere Schranke von nach oben beschränkten Teilmengen der rationalen Zahlen definieren lassen.[5] Für unsere Zwecke reicht es aus, wenn Sie sich unter den reellen Zahlen die Punkte auf der Zahlengerade vorstellen (Mathematiker tun das auch, auch wenn sie das offiziell nicht gerne zugeben). Neue Rechenregeln müssen Sie beim Umgang mit den reellen Zahlen übrigens nicht lernen. Wie schon für die rationalen Zahlen stehen auch für die reellen Zahlen alle vier Grundrechenarten zur Verfügung, und es gelten die Rechenregelen, die Ihnen aus der Elementarmathematik vertraut sind. Kurz: auch die reellen Zahlen genügen den Körperaxiomen.

Einen Ausdruck der Form $a < b$, wie auch einen Ausdruck der Form $a \leq b$ nennt man übrigens eine **Ungleichung**. Beim Umgang mit Ungleichungen leisten folgende Grundregeln unschätzbare Dienste (Beweis in den Übungen):

- Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $a \leq b$ äquivalent $a + c \leq b + c$.
- Bei der Multiplikation muss man mit dem Vorzeichnen etwas aufpassen. Nur wenn c positiv ist $a \leq b$ äquivalent $c \cdot a \leq c \cdot b$. Ist hingegen c negativ, ist $a \leq b$ äquivalent $c \cdot b \leq c \cdot a$.

Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen sind die *Intervalle*. Man unterscheidet das offene Intervall $]a, b[:= \{x | a < x < b\}$, das abgeschlossene Intervall $[a, b] := \{x | a \leq x \leq b\}$, das linksseitig halboffene Intervall $]a, b] := \{x | a < x \leq b\}$, und das rechtsseitig halboffene Intervall $[a, b[:= \{x | a \leq x < b\}$. Nur im abgeschlossenen Intervall findet sich ein kleinstes und ein größtes Element, treffend genannt *Minimum* und *Maximum*. In allen anderen Intervallen fehlt entweder das eine, oder das andere oder gar beide. Die Intervallgrenzen lassen sich dann mit dem Supremum bzw Infimum identifizieren.

3.2.1 Archimedische Ordnung

Über ihre Körperhaftigkeit hinaus haben reelle Zahlen eine wichtige Eigenschaft, die die weiter unten einzuführenden komplexen Zahlen nicht aufweisen: sie lassen sich anordnen. Demnach heißt eine reelle Zahl a genau dann kleiner gleich einer reellen Zahl b, notiert $a \leq b$, wenn $b - a$ nicht negativ. Die Relation $\leq$ erfüllt die Kriterien einer **Ordnungsrelation**: sie ist 1. *reflexiv*, denn $a \leq a$, 2. *antisymmetrisch*, denn wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann gilt $a = b$, und 3. *transitiv*, denn wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dann gilt $a \leq c$. Die Ordnung ist *total*, auch genannt *linear*, denn für jedes beliebige Paar reller Zahlen lässt sich entscheiden, ob $a < b$, $b < a$ oder $a = b$, und sie ist archimedisch: zu je zwei reellen Zahlen $0 < x < y$ gibt es eine natürliche Zahl n so dass $y < nx$. Die **Archimedische Ordnung** darf man auch lesen "es gibt keine unendlich kleinen Zahlen", und das ganze nun zusammengefasst: die reellen Zahlen bilden einen vollständigen, archimedisch geordneten Körper.

[5] Alternativ als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen, oder als Äquivalenzklassen von Intervall-

3.2.2 Betrag

Des weiteren lässt sich sinnvoll über die absolute Größe einer reellen Zahl und den Abstand zweier rellen Zahlen a und b reden. Ein Maß für die absolute Größe einer reellen Zahl x vermittelt ihr **Absolutbetrag**,

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

und der **Abstand** zweier rationaler Zahlen a, b wird erklärt $|a-b|$. Für $\epsilon \leq 0$ heißen rationale Zahlen x mit $|a-x| < \epsilon$ "aus der ϵ-**Umgebung** von a". Absolutbetrag und Abstand gestatten Größen- bzw. Entfernungsvergleiche, die insbesondere für die Analysis von großer Bedeutung sind.

Hat man nun eine Gleichung $a = b$, so ist selbstverständlich auch $|a| = |b|$. Allerdings läßt sich aus einer Gleichung $|a| = |b|$ nicht schließen, dass a und b gleich, sondern lediglich $a = \pm b$ als Kurzform der Aussage "$(a = b) \vee (a = -b)$." Für das Produkt $a \cdot b$ gilt $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Für die Summe $a + b$ gilt allerdings keineswegs immer $|a + b| = |a| + |b|$, denken Sie nur an $a = -b$ mit $a \neq 0$, dann wäre doch $|a + b| = |a - a| = |0| = 0 \neq 2 \cdot |a|$. Vielmehr

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \tag{3.18}$$

Beweis: Übungen …

Das **Signum** einer Zahl ist definiert

$$\mathrm{Sgn}(a) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Offensichtlich $|a| = a \cdot \mathrm{sgn}(a)$. Angesichts $\mathrm{sgn}(a \cdot b) = \mathrm{sgn}(a) \cdot \mathrm{sgn}(b)$ ist $|a \cdot b| = a \cdot b \cdot \mathrm{sgn}(a \cdot b) = a \cdot \mathrm{sgn}(a) \cdot b \cdot \mathrm{sgn}(b) = |a| \cdot |b|$.

3.2.3 Potenz und Wurzeln

Beim Rumrechnen mit Zahlen stößt man häufig auf Terme der Form x^n oder $x^{\frac{1}{n}}$, genannt die n-te Potenz von x bzw. die n-te Wurzel von x.

schachtelungen rationaler Intervalle.

Definition (Potenz): Sei a Element eines Körpers $\mathbb{K}$; dann ist die **Potenz** a^n für ganze, nicht-negative Zahlen $n \geq 0$ rekursiv definiert,

$$a^0 := 1\,, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n \qquad (n \geq 0) \tag{3.20}$$

Sofern $a \neq 0$ sei fürderhin

$$a^{-n} := (a^{-1})^n \equiv \frac{1}{a^n}\,. \tag{3.21}$$

Die Definition bedeutet, dass für jede Zahl $a \neq 0$ der Wert von a^p für beliebige *ganze* Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ bestimmt ist. Wegen "Minus-Mal-Minus-ist-Plus" gilt

$$(-1)^p = \begin{cases} +1 & \text{für } p \text{ gerade Zahl} \\ -1 & \text{für } p \text{ ungerade Zahl} \end{cases} \tag{3.22}$$

Außerdem gelten die Rechenregeln

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \tag{3.23}$$
$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \tag{3.24}$$
$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \tag{3.25}$$

für nicht-negativen ganzen Zahlen p, q und, falls a und b von 0 verschieden sind, für alle ganzen Zahlen p, q. Man beachte, dass es für das Produkt $a^p \cdot b^q$ *keine* einfache Rechenregel gibt. Ach übrigens – Sie erinnern sich sicherlich, dass Rechenregeln immer beweisbedürftig sind, bevor man sie im Alltag benutzt ....

Die Gleichung $x^n = x^n$ ist eine Banalität, über die zu reden nicht weiter lohnt. Die rechte Seite ist eine Zahl, nennen wir sie a. Die Banalität erscheint jetzt in der Form $x^n = a$, und wird für gegebenes a zur Frage: welche Zahlen x sind es, deren jeweilige n-te Potenz die Zahl a liefern? Die Mehrzahlform ist hier mit Bedacht gewählt: Sei

Die in Gl. (3.6) eingeführten Binomialkoeffizient verdanken ihren Namen dem **Binomischen Satz**

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\ &\quad + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned} \tag{3.26}$$

den Sie in den Übungen beweisen. Voraussetzung für den Binomischen Satz ist lediglich, dass a und b aus einen Körper stammen. Welcher Körper (rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen) das im einzelnen ist, ist unerheblich.

nämlich für n gerade eine Zahl x_0 Lösung der Gleichung $x^n = a$, also $x_0^n = a$, dann ist wegen () auch $-x_0 \equiv -1 \cdot x_0$ eine Lösung! Ist allerdings n ungerade, entfällt diese Möglichkeit: das Vorzeichen von x_0 ist in diesem Falle durch das Vorzeichen von a bereits bestimmt.

Lösungen der Gleichung $x^n = a$ heißen **Wurzeln** von a. Für nicht-negative a definiert

$$a^{\frac{1}{n}} \tag{3.27}$$

die sog. **positive Wurzel** der Gleichung $x^n = a$. Die Notation respektiert (), denn $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$.

Sofern n eine ungerade Zahl ist die positive Wurzel die einzige Wurzel von $x^n = a > 0$. Sofern n ein gerade Zahl, sind die positive Wurzel und die negative Wurzel $-(a)^{\frac{1}{n}}$ Wurzeln von $x^n = a$. Im Falle negativer a, also $a < 0$, ist die Gleichung $x^n = a$ nur für ungerade n lösbar, mit eindeutig bestimmter Wurzel $-(-a)^{\frac{1}{n}}$.

3.3 Komplexe Zahlen

Die Feststellung, dass $x + 2 = 1$ keine Lösung in den Natürlichen Zahlen hat, führte zur Erfindung der ganzen Zahlen. Und die Feststellung dass $2x = 1$ keine Lösung in den ganzen Zahlen hat, führte zur Erfindung der rationalen Zahlen. Die Einsicht, dass $x^2 = 2$ keine Lösung in den rationalen Zahlen hat führte zur Erfindung der reellen Zahlen. Und die Einsicht dass $x^2 = -1$ keine Lösung in den reellen Zahlen hat führte zur Erfindung der – Tata Tata! –*komplexen Zahlen.*

3.3.1 Definition

Definition: Unter dem **Körper der komplexen Zahlen**, bezeichnet $\mathbb{C}$, versteht man die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zusammen mit den beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x, y) +_{\mathbb{C}} (u, v) &:= (x + u, y + v)\,, && (3.28)\\ (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (u, v) &:= (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u) && (3.29)\end{aligned}$$

genannt *komplex-Addition* und *komplex-Multiplikation*.

Die Verknüpfungen sind assoziativ und kommutativ und genügen dem Distributivgesetz. Vor diesem Hintergrund erlauben wir uns eine kleine Schlamperei, und lassen das Präfix "komplex-" und Subskript $\mathbb{C}$ unter den Tisch fallen.

Paare vom Typ $(0, y)$ lassen sich mit der Abkürzung

$$i := (0, 1) \tag{3.30}$$

und Blick auf () auch schreiben $(y, 0) \cdot i$ bzw – die komplexe Multiplikation ist kommutativ – $i \cdot (y, 0)$. Mit Blick auf () erhält man $(x, y) = (x, 0) + i \cdot (y, 0)$, und da Paare vom Typ $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ sich bzgl. der komplexen Addition und Multiplikation genauso verhalten wie die reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation, dürfen die Paare $(x, 0)$ mit reellen Zahlen x identifiziert werden, und man schaut auf die heutzutage gebräuchliche Schreibweise einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$,

$$z = x + iy \tag{3.31}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und

$$i \cdot i \equiv i^2 = -1 \tag{3.32}$$

Man nennt die reellen Zahlen x und y den *Realteil* und den *Imaginärteil* von z. Und die Zahl i nennt man zuweilen "Wurzel-aus-Minus-Eins", $i = \sqrt{-1}$. Man könnte sie auch "Minus Wurzel-aus-Minus-EIns" nennen, schließlich ist auch $(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$, aber wir bleiben bei "$i$ ist die positive Wurzel-aus-Minus-Eins".

Gerechnet wird mit komplexen Zahlen genauso wie mit reellen Zahlen, wobei Produkte von i unter Verwendung von $i^2 = -1$ vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} (x+iy)+(u+iv) &= x+u+i(y+v)\,, && (3.33)\\ (x+iy)\cdot(u+iv) &= x\cdot u - y\cdot v + i(y\cdot u + x\cdot v)\,. && (3.34) \end{aligned}$$

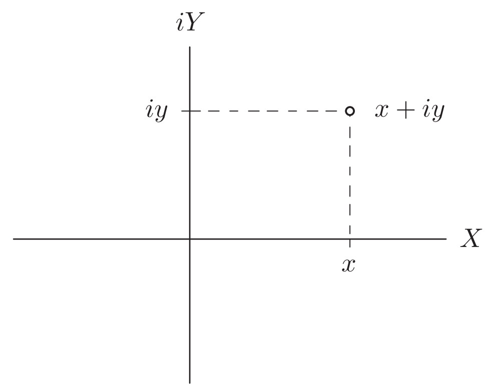

Abb 3.4 *Die Gauss'sche Zahlenebene.*

3.3.2 Gauss'sche Zahlenebene

Komplexe Zahlen lassen sich als Punkte einer Zahlenebene $\simeq \mathbb{R}^2$ darstellen, genannt die *Gauss'sche Zahlenebene*. In Gauss' eigenen Worten[6]

> So wie man sich das ganze Reich aller rellen Größen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abzisse= a Ordinate= b bestimmt, die Größe $a + ib$ gleichsam repräsentiert.

Heutzutage nennt man die Abzisse in diesem Zusammenhang auch die *reelle Achse*, und die Ordintate die *imaginäre Achse*.

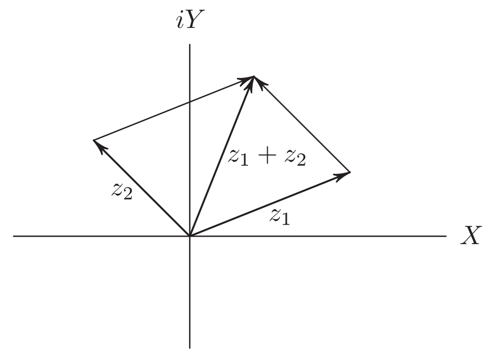

Abb 3.5 *Die Addition zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 mittels Parallelogrammregel in der Zeigerdarstellung.*

Man kann nun mit jeder komplexen Zahl einen Zeiger zuweisen dessen Schaft im Ursprung und dessen Spitze auf die jeweils gewünschte Zahl zeigt. Die Addition zweier Zahlen indem man einen der beiden Zeiger parallel verschiebt, so dass sein

[6] zitiert nach Ebbinghaus et al. *Zahlen*, S. 49f

Schaft mit der Spitze des anderen Zeigers zusammenfällt. Der resultierende Zeiger ist dann das Bild der Summe. Welchen der beiden Zeiger man verschiebt ist dabei ganz gleichgültig – die Addition ist schließlich kommutativ.

Nützlich in diesem Zusammenhang die zu einer komplexen Zahl $z = x+iy$ *konjugiert komplexe* Zahl

$$z^* := x - iy \tag{3.35}$$

die man in der Gausschen Zahlenebene durch Spiegelung an der reellen Achse erhält. Leicht überzeugt man sich von den Regeln

$$\begin{aligned} (z+w)^* &= z^* + w^*\,, & (3.36)\\ (z \cdot w)^* &= z^* \cdot w^*\,, & (3.37)\\ (z^*)^* &= z\,. & (3.38) \end{aligned}$$

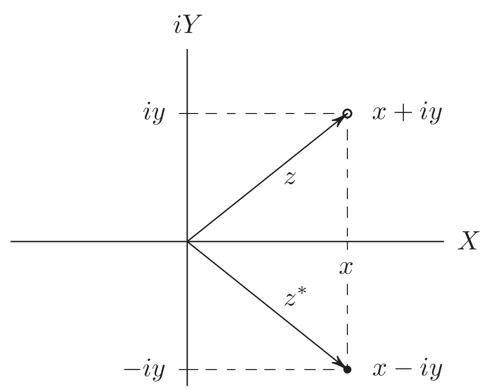

Abb 3.6 *Eine komplexe Zahl z und ihre komplex-konjugierte Schwester z^* in der Zeigerdarstellung.*

Lies: die Konjugation einer Summe bzw. eines Produkts ist die Summe bzw. das Produkt der konjugierten und Doppelkonjugation ist wie nix tun.

Mit Hilfe der Konjugation lassen sich Real- und Imaginärteil extrahieren,

$$\Re(z) = \frac{z+z^*}{2}\,, \qquad \Im(z) = \frac{z-z^*}{2i} \tag{3.39}$$

was sich als nützlich erweist, wenn man z nicht schon als Summe von Real- und Imaginärteil gegeben hat.

Das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrer konjugierten z^*,

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 \tag{3.40}$$

ist nach Pythagoras die *Quadratlänge* der geometrischen Strecke $0z$. Die Länge selber

$$|z| := \sqrt{z \cdot z^*} \equiv \sqrt{x^2+y^2} \tag{3.41}$$

nennt man den *Betrag* der komplexen Zahl z.

Kehrwertbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ lässt sich jetzt leicht geometrisch deuten. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} && (3.42)\\
&= \frac{z^*}{z \cdot z^*} && (3.43)\\
&= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} && (3.44)\\
&= \left(\frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}\right)^* && (3.45)
\end{aligned}$$

und da $\frac{z}{|z|}$ komplexe Zahl vom Betrag 1 in Richtung z, die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}$ eine *Spiegelung am Einheitskreis*, ist $\frac{1}{z}$ nichts anderes als z gespiegelt am Einheitskreis gefolgt von einer Spiegelung an der reellen Achse.

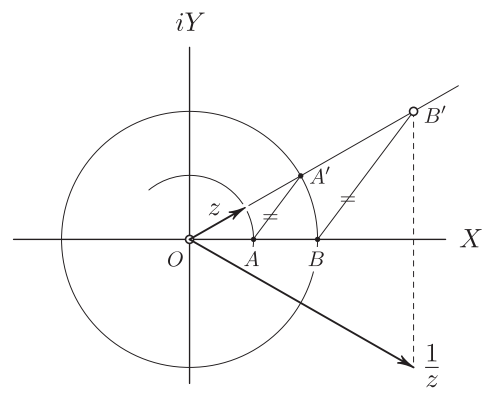

Abb 3.7 *Kehrwertbildung geometrisch, mittels Spiegelung am Einheitskreis: Wegen Strahlensatz $OB' : OA' = OB : OA$, und da $OB = OA' = 1$ (Einheitskreis!) folgt $OB' = 1 : OA = 1 : |z|$. Der Punkt A' bezeichnet die komplexe Zahl $\frac{z}{|z|}$ (die vom Betrag 1 ist), der Punkt B' bezeichnet die komplexe Zahl $\frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}$.*

3.3.3 Polardarstellung

Erinnert man sich an dieser Stelle an die geometrische Definition des Cosinus und Sinus, wundert man sich gar nicht mehr, wenn man die komplexe Zahl $z = x + iy$ auch darstellen kann

$$z =: \varrho \cos\varphi + i\varrho \sin\varphi \tag{3.46}$$

worin φ der Winkel, den der Zeiger z mit der reellen Achse bildet, und ϱ seine Länge,

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right), && (3.47)\\
\varrho &= |z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}\,. && (3.48)
\end{aligned}$$

Gl. (3.46) definiert die sog. *Polardarstellung* von z, im Unterschied zu $z = x + iy$, die in diesem Zusammenhang auch die *kartesische Darstellung* von z genannt wird.

Unter Bezug auf die Exponentialfunktion behaupten wir nun die *Eulersche Formel*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{3.49}$$

so dass

$$z = |z|e^{i\varphi} \tag{3.50}$$

Die *Exponentialfunktion*, auch genannt *Eulersche e-Funktion*, ist die "Mutter aller Funktionen" (Jänich). Vielleicht kennen Sie die e-Funkton aus der Schule. Und wenn, dann vermutlich für reelle Argumente. Wenn aber nicht, dann ist das auch nicht schlimm. Schieben wir halt eine kleine Erläuterung zur Exponentialfunktion dazwischen.

Wir nennen $\cos\varphi + i\sin\varphi := f(\varphi)$, und wollen zeigen, dass $f(\varphi) = e^{i\varphi}$. Zunächst stellen wir mal fest $|f(\varphi)| = 1$, d.h. für beliebiges reelles φ liegt $f(\varphi)$ in der Gauss'schen Zahlenebene auf dem Einheitskreis. Dann stellen wir fest $f(\varphi)^* = f(-\varphi)$. Schließlich stellen wir fest $f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta)$.

WIr differenzieren nach φ, erhalten wegen $[\cos\varphi]' = -\sin\varphi$ und $[\sin\varphi]' = \cos\varphi$ die Aussage $f' = if$.

3.4 Aufgaben

▷ **Aufgabe 3-1** (π Punkte)

Gehen Sie an eine Kreidetafel und skizzieren Sie freihändig (ohne Hilfsmittel!) die sog. *Zahlengerade* (Länge ca 150cm. Warum?). Vergessen Sie nicht, anzugeben wo 0