Kapitel 4

Vektoren

Physikalische Messgrößen wie Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung bedürfen der Angabe dreier Zahlen um ihren Wert in einem gegebenen Bezugsystem zu spezifizieren. Es reicht halt nicht aus, wenn man sagt "das Elektron saust mit hundertfuffich Ka-em-ha!". Selbst wenn man das mit "Die Schnelligkeit des Elektrons beträgt etwas weniger als 42 m·sec^{-1}" in eine wissenschaftlich akzeptable Form gebracht hat, müsste man noch die Richtung angeben, in der das Elektron unterwegs ist.

"Richtung" ist ein geometrischer Begriff: Ein Punkt Q liegt von P aus gesehen in Richtung R, wenn P, Q und R auf einer Geraden. `[Hier ''Richtung'' weiter entwicklen zu ''Äquivalenzklassen paralleler Strecken'' (via Limes` $R \to \infty$ `auf Strahl durch` PQ`) etc, dann ''Vektor'' motivieren als Äquivalenzklasse gerichteter Strecken mit 'parallel' als Äquivalenzrelation usw]`

4.1 Definition

Wichtige Dinge sollte man auch einmal anständig definieren. Hier also

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein $\mathbb{K}$-**Vektorraum** ist eine Menge V auf der eine Abbildung **Vektoraddition**

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned} \tag{4.1}$$

und eine Abbildung **Skalarmultiplikation**

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\lambda, \vec{v}) &\mapsto \lambda\vec{v} \end{aligned} \tag{4.2}$$

gegeben sind, die den folgenden 8 Axiomen genügen (das Symbol $\cdot$ für die Skalarmultiplikation lassen wir unter den Tisch fallen):

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
3. Es gibt ein ausgezeichnetes Element $\vec{o} \in V$, genannt "Nullvektor", mit $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$.
4. Zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein Element $-\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o}$.
5. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.
6. $1\vec{v} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$.
7. $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v}, \vec{u} \in V$.
8. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.

Außerdem vereinbaren wir $\vec{v}\lambda := \lambda\vec{v}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$.

Für die Physik von besonderem Interesse sind reelle und komplexe Vektorräume, also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die $\lambda \in \mathbb{K}$ nennt man auch **Skalare** des Vektorraums, die Menge V auch die **Grundmenge** und die Abbildungen $+, \cdot$ **Vektoroperationen**. Pedantisch notiert man einen Vektorraum als Quadrupel $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, redet zuweilen von einem *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, ruft ihn aber meist einfach beim Namen der Grundmenge V.

Vektoren eines reellen Vektorraums werden gerne durch Pfeile veranschaulicht (daher unsere Notation eines Vektors, wie beispielsweise $\vec{v}$, mit dem Pfeil auf dem Kopf). Ein Pfeil ist ein geometrisches Ding der Euklidischen Geometrie, nämlich ein gerichtetes Geradenstück. Dabei soll gelten, dass zwei Pfeile, die sich nur durch eine Parallelverschiebung unterscheiden, den gleichen Vektor repräsentieren. Vektoren sind also Pfeilklassen. Man lernt nie aus …

Der Skalarmultiplikation entspricht die Streckung bzw. Stauchung eines Pfeils – vgl. Abb. 4.1, der Vektoraddion entspricht das Aneinanderhängen zweier Pfeile – vgl. Abb. 4.2. Die Axiome der Vektoraddition und Skalarmultiplikation erweisen sich nun als elementare Sätze der Euklidischen Geometrie. Das Kommutativaxiom der Vektor-Addition, beispielsweise, findet dann seinen Ausdruck in der Parallelogrammkonstruktion – vgl. Abb. 4.2.

Gewarnt sei allerdings vor der Gleichsetzung von Vektoren mit gerichteten Strecken. Geometrisch sind zwei gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms durchaus verschiedene Strecken, algebraisch werden sie aber durch genau einen Vektor repräsentiert – vgl. Abb. 4.2. Außerdem kennt die Geometrie beispielsweise den Begriff des Winkels oder der Länge – in der Definition des Vektorraums ist von entsprechenden Größen nirgendwo die Rede. Zwar kann man entsprechende Größen auch für einen Vektorraum vereinbaren – und das geschieht im nächsten Kapitel im Begriff der Norm und des Skalarprodukts – das ist dann aber ein besonderer Akt.

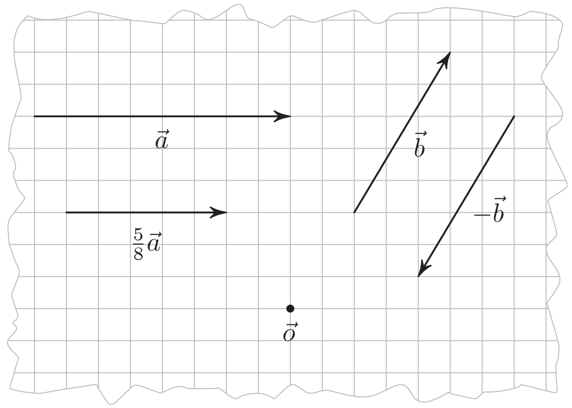

Abb 4.1 *Illustration der Skalarmultiplikation und Inversion.*

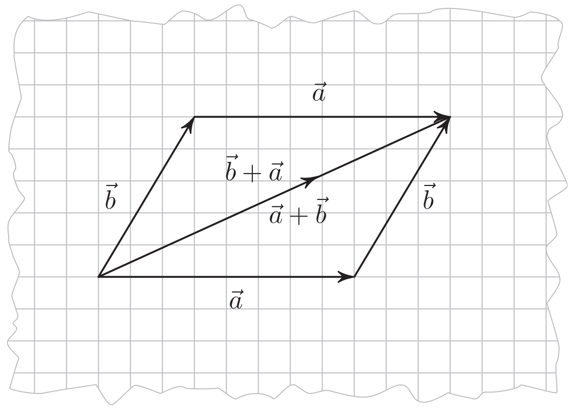

Abb 4.2 *Addition zweier Vektoren und Illustraion des Kommutativgesetzes.*

Hat man ein System von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V$ nennt man die Menge aller **Linearkombinationen** $L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) := \{\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ die **lineare Hülle** des Systems. Die Vektoren des Systems $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn in der Darstellung des Nullvektors $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{o}$ notwendig alle Skalare gleich Null; andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Ein System $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ konstituiert eine **Basis** von V, notiert $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$, wenn das (1) System linear unabhängig, und (2) wenn jeder Vektor von V als Linearkombination der $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ dargestellt werden kann. Die Zahl der Vektoren in einer Basis ist für alle Basen eines Vektorraums die Gleiche, und definiert die **Dimension** des Vektorraums. Die Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ in einer Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ notiert man

$$\vec{v} = \vec{b}_1 v^1 + \vec{b}_2 v^2 + \cdots + \vec{b}^n v^n = \sum_i \vec{b}_i v^i =: \vec{b}_i v^i \tag{4.3}$$

wobei ganz rechts die **Einsteinsche Summenkonvention** eingeführt wurde: "über doppelt auftretende, schräg gestellte Indices wird summiert." Unter leichter Sprachverdrehung nennt man v^i die i**-te Komponente** von $\vec{v}$ (obwohl es sich eigentlich um eine Koordinaten handelt). Auch setzt man den Abzählindex i bei den Komponenten gerne nach unten schreibt also v_i statt v^i. Das ist inbesondere für Novizen hilfreich, kommen sie doch nicht in Versuchung, die i-te Komponente als i-te Potenz von v, "vau-hoch-iih", zu lesen. Wir bleiben hier aber bei der Hochstellung. Tiefgestellte Indices an Koordinaten werden später noch gebraucht – Stichwort Dualraum.

Hat man eine Teilmenge U eines Vektorraums V, kann man die Elemente von U zwar addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, aber es ist nicht garantiert, dass mit $\vec{u}, \vec{v} \in U$ auch $\vec{u} + \vec{w} \in U$. Teilmengen für die das garantiert ist, verdienen besondere Beachtung, etwa in Form einer

Definition (Untervektorraum): Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$

definiert einen *Untervektorraum* von V, wenn (1) $U \neq \emptyset$, und (2) für alle $\vec{u}, \vec{w} \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\vec{u} + \vec{w} \in U$, $\lambda\vec{u} \in U$.

Ein Untervektorraum U ist also selbst ein Vektorraum. Insbesondere sind $\{\vec{o}\}$ und V selbst Untervektorräume von V.

Eine lineare Hülle $L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, beispielsweise, ist ein Untervektorraum von V, und man sagt, das Tupel $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sei ein **Erzeugendensystem** dieses Untervektorraums. Sind die Vektoren eines Erzeugendensystem linear unabhängig, konstituier das System eine Basis der linearen Hülle.

Sind U und W Untervektorräume von V, so ist auch der Durchschnitt $U \cap W$ Untervektorraum von V (wer's nicht glaubt: Beweis als Übungsaufgabe!). Die Vereinigungsmenge $U \cup W$ zweier Untervektorräume U, W ist i.A. kein Untervektorraum, wohl aber die *Summe*

$$U + W := \{\vec{u} + \vec{w} | \vec{u} \in U, \vec{w} \in W\} \subset V \tag{4.4}$$

Untervektorräume des Vektorraum $\mathbb{R}^3$, beispielsweise, kann man sich in Form der Geraden und Ebenen durch den Ursprung veranschaulichen.

4.2 Beispiele

Beispiel 1 (Zahlenspalten): Der $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen. So ein n-Tupel notieren wir jetzt mal als Spalte,

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

wobei mit x^i die i-te Komponente des Spaltentupels gemein ist, und nicht etwa "icks-hoch-i". Jetzt vereinbaren wir noch, wie Spalten zu addieren sind,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} , \tag{4.6}$$

und wie man Spalten mit einer reellen Zahl multipliziert,

$$\lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

Rechenoperationen für Zahlenspalten sind damit auf Rechenoperationen mit gewöhnlichen Zahlen zurückgeführt. Und siehe da – die hier eingeführten Rechenoperationen genügen den Vektroraumaxiomen! Kurz: Zahlenspalten bilden einen Vektorraum – den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Eine beliebt Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{4.8}$$

genannt die **kanonische Basis**. Die Zahl der Basisvektoren ist n – der $\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Beispiel 2 (Zahlenzeilen): `[Im WS11 nicht vorgestellt; sollte man aber machen -- dann hätte man gleich schon den Dualraum eingeführt ...]` Man kann die

n-Tupel des Zahlenraums(!) $\mathbb{R}^n$ natürlich auch als Zeile notieren

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.9}$$

wobei wir hier die i-te Komponente mit einem nach unten gestellten Index bezeichnen. Zeilenaddition wird in Analogie zur Spaltenaddition vereinbart,

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \tag{4.10}$$

und auch die Skalarmultiplikation erfolgt in Analogie zum Spaltenfall,

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,. \tag{4.11}$$

Die so eingeführten Operation genügen den Axiomen eines Vektorraums. Wir bezeichen diesen "Vektorraum der Zahlenzeilen" mit dem Symbol $\mathbb{R}^{n*}$, um ihn nicht mit dem Vektorraum der Zahlenspalten, bezeichnet $\mathbb{R}^n$, zu verwechseln.

Beispiel 3 (Funktionen): Eine reellwertige Funktion auf einer Menge X, daran sei erinnert, ist ja nicht anderes als eine Abbildung $X \to \mathbb{R}$. Sei nun $\mathcal{F}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $X = [-1, 1]$, also $\mathcal{F} = \{f | f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$. Mit der Verabredung

$$(f + g)(x) \;:=\; f(x) + g(x) \tag{4.12}$$
$$(\lambda f)(x) \;:=\; \lambda f(x) \tag{4.13}$$

für alle $x \in [-1, 1]$ sind Addition von Funktionen und Skalarmultiplikation punktweise erklärt. Man überzeugt sich, dass mit $f, g \in \mathcal{F}$ auch $f + g$ und λf Element von $\mathcal{F}$, d.h. auch $\{\mathcal{F}, \mathbb{R}, +, \cdot\}$ ist reeller Vektorraum. Eine endliche Basis lässt sich hier nicht angeben – der $\mathcal{F}$ ist ein *unendlich dimensionaler* Vektorraum.