Mathematische Methoden LA

- WS 2013/2014 -

Übungsblatt 4 (20 Punkte)

Ausgabe 30.10.2013 – Abgabe 06.11.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1

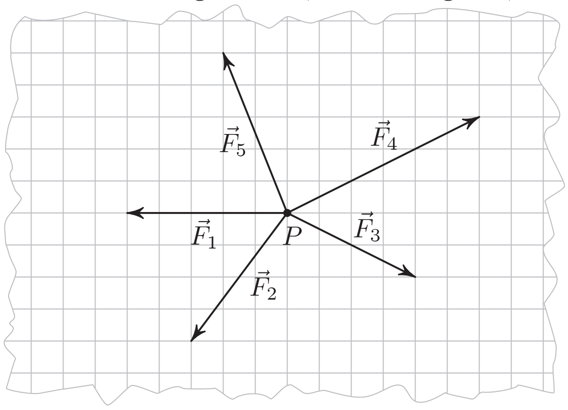
Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum stets nur einen Nullvektor gibt.

▷ Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es in einem Vektorraum zu jedem $\vec{v}$ stets nur ein $-\vec{v}$ gibt.

▷ Aufgabe 3*

Die Abbildung zeigt fünf Kräfte, die an einem Punkt P angreifen. Bestimmen Sie (1) zeichnerisch, (2) arithmetisch die Gegenkraft, die nötig ist, um P n Ruhe zu halten.



▷ Aufgabe 4

Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz der Vektoralgebra: Ist $\mathcal{B} := (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V, dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ genau ein $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \,. \tag{1}$$

<u>Bemerkung 1:</u> Um die Bestimmtheit der λ_i durch den Vektor $\vec{v}$ auszudrücken, schreibt man statt λ_i gerne v_i (bzw. v^i), und nennt die v^i die *Komponenten* von $\vec{v}$.

<u>Bemerkung 2:</u> Angesichts des hier bewiesenen Befundes sind alle n-dimensionalen reellen Vektorräumer isomorph dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Oder – noch prägnanter – eigentlich gibt es nur einen n-dimensionalen reellen Vektorraum, und das ist der $\mathbb{R}^n$.

▷ **Aufgabe 5***

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden drei Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

(b) Und wie sieht es mit folgenden drei Vektoren aus:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \tag{3}$$