Mathematische Methoden LA

- WS 2013/2014 -

Übungsblatt 5 (20 Punkte)

Ausgabe 05.11.2013 – Abgabe 13.11.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ Aufgabe 1 * (5 Punkte)

Gegeben drei Vektoren (vgl. Aufgabe 5(b) vom Übungsblatt 4)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ und das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

▷ Aufgabe 2 * (2 Punkte)

Gegeben drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Berechnen Sie das Spatprodukt.
Hinweis: Auf übungsblatt 4, Aufgabe 5(a) haben Sie schon gezeigt, dass diese drei Vektoren linear abhängig. Müssen Sie das Spatprodukt also wirklich ausrechnen, oder können Sie die Antwort gleich hinschreiben?

▷ Aufgabe 3 * (13 Punkte)

Unter einem Ortsvektor $\vec{x}$ versteht man einen Vektor, dessen Schaft in einem besonderen Punkt, dem "Ursprung" O befestigt ist, und dessen Spitze einen Raumpunkt P bezeichnet. Wählt man eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i$, fungieren die Komponenten x^1, x^2, x^3 des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{e}_i x^i$ als kartesische Koordinaten von P. Dabei zeigt $\vec{e}_1$ vereinbarungsgemäß in Richtung der X-Achse, $\vec{e}_2$ in Richtung der Y-Achse, und $\vec{e}_3$ in Richtung der Z-Achse. Die Komponenten von $\vec{x}$ schreibt man dann auch x, y, z statt des verwirrenden x^1, x^2, x^3.

Hat man nun eine Vektorgleichung, beispielsweise $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$, bestimmen deren Lösungen ein geometrisches Objekt. Im Falle $\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = 0$ sind alle Ortvektoren $\vec{x}$ Lösung, die senkrecht auf $\vec{e}_3$ stehen. Das sind aber alle diejenigen Ortsvektoren, deren Z-Komponente gleich Null, und die Endpunkte dieser Vektoren bilden eine Ebene, die XY-Ebene!

(a) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x}| = 1$ bestimmt?

(b) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$ bestimmt, wobei $\vec{x}_0$ fester Ortsvektor und R ein festes Skalar?

(c) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$ bestimmt, wobei $\vec{e}$ fester Einheitsvektor?

(d) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$ bestimmt, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ feste Vekoren?
Hinweis: Eigentlich sind das drei Gleichungen. Warum?

(e) Überzeugen Sie sich davon, dass mit $\vec{x} \cdot \vec{k} = k^2$ für festes $\vec{k}$ und $k = |\vec{k}|$ der Betrag von $\vec{k}$ die Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ im Abstand k vom Ursprung ausgezeichnet ist.

Der Duck einer Schallwelle kann in der Form $p(\vec{x}, t) = p_0 + f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ angegeben werden, worin f irgendeine “schöne” Funktion (nicht unbedingt Sinus oder Cosinus).

(f) Bestimmen Sie die Orte an denen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 der Druck $p_0 + f(0)$ herrscht.

(g) Wie bewegt sich das in (f) bestimmte geometrische Objekt, und welches ist gegebenenfalls seine Geschwindigkeit?

Bemerkung: In (f) und (g) begegnet Ihnen ein wichtiges physikalisches Konzept – die *ebene Welle*. Warum die wohl “eben” heißt?