Mathematische Methoden LA

- WS 2013/2014 -

Übungsblatt 7 (20 Punkte)

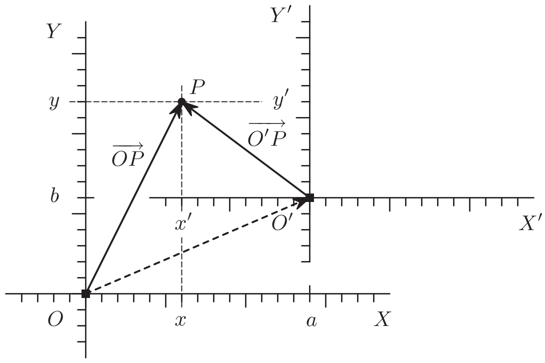
Ausgabe 22.11.2013 – Abgabe 27.11.2013 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

Sieht länger aus als es ist ...

▷ Aufgabe 1

Ein kartesisches Koordinatensystem ist durch einen Bezugspunkt und drei ausgezeichnete Richtungen bestimmt. Zwei Beobachter Alice und Bob, die verschiedene Bezugspunkte und/oder Richtungen gewählt haben, können die Koordinaten, mit denen sie ein-und-denselben Raumpunkt beschreiben, ineinander umrechnen.



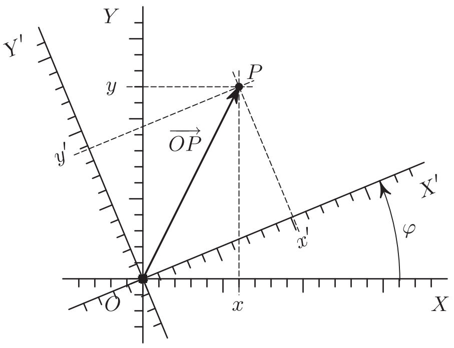
(a) Bob wählt als Bezugspunkt den Punkt O, Alice den Punkt O'. Die räumlichen Richtungen mögen von beiden gleich gewählt sein. Zeigen Sie: Ein beliebiger Punkt P der in Bobs Koordinaten durch das Tripel (x, y, z) beschrieben wird, wird in Alices Koordinaten durch das Koordinatentripel (x', y', z') beschrieben,

$$x' = x - a\,, \quad y' = y - b\,, \quad z' = z - c\,, \tag{1}$$

wobei (a, b, c) die Koordinaten von Alice's Bezugspunkt O' in Bobs Karte (in Alice's Karte hat O' die Koordinaten $(0, 0, 0)$).

(b) Wiederum errichten Alice und Bob ihre Koordinatensystem, diesmal mit gleichem Bezugspunkt, aber verschiedenen ausgezeichneten Richtungen. Bob's ausgezeichneten Richtungen entprechen die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, Alices' ausgezeichneten Richtungen die Basisvektoren $\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$ (wir verwenden hier numerische Abzählindices statt der X, Y, Z, und numerieren auch die Koordinaten durch x^1, x^2, x^3 statt x, y, z). Bob kann seine Basisvektoren als Linearkombination von Alice's Basisvekoren angeben (Einsteinsche Summenkonvention “über doppelt auftretende, schräg gestellte Indices wird summiert”)

$$\vec{e}_i = \vec{e}_{i'} R^{i'}{}_i\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$



Ein Punkt P – durch Festlegung eines Ursprungs O die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$ – wird in den beiden Koordinatensystemen nun durch verschiedenen Koordinaten x^i bzw $x^{i'}$ spezifiziert. Es ist

$$\overrightarrow{OP} = \vec{e}_i x^i = \vec{e}_{i'} x^{i'} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass im das Umrechnen der Koordinaten gemäß

$$x^{i'} = R^{i'}{}_i x^i \tag{4}$$

erfolgt. Man beachte, dass die gestrichenen Koordinaten hier links erscheinen, während es in (2) die ungestrichenen Basisvektoren sind.

(c) Die neun Koeffizienten $R^{i'}{}_i$ die hier den Kartenwechsel organisieren sind allerdings nicht unabhängig. Zeigen Sie, dass die $R^{i'}{}_i$ verknüpft sind

$$\delta_{ij} = \delta_{i'j'} R^{i'}{}_i R^{j'}{}_j \, . \tag{5}$$

Wieviele unabhängie Paramter gibt es demzufolge?

Hinweis: Nach Voraussetzung verknüpfen die $R^{i'}{}_i$ Orthonormalbasen, technisch $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ bzw. $\vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_{j'} = \delta_{i'j'}$, und das bedeutet ...

Klienes Beispiel zum Abschluss: Seien beispielsweise Alice Basisvektoren $\vec{e}_{1'}$, $\vec{e}_{2'}$ gegenüber Bobs Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ um den Winkel φ gedreht, dann in Matrizensprache

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{6}$$