Mathematische Methoden LA

- WS 2013/2014 -

Übungsblatt 11 (20 Punkte)[1][2]

Ausgabe 14.01.2013 – Abgabe 22.01.2014 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** * (2 Punkte)

Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

<u>Hinweis:</u> Eine Partialbruchzerlegung des Summanden könnte sich als nützlich erweisen …

▷ **Aufgabe 2** (4 Punkte)

Falls Sie sich jemals gefragt haben, wie man Wurzeln aus 2 zieht (vulgo "$\sqrt{2}$ ausrechnet") – hier ist die Antwort: mit Hilfe der Rekursion

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{3}$$

worin a eine vorgegebene reelle Zahl größer Null (deren Wurzel man berechnen möchte).

(a) Berechnen Sie für den Fall $a = 2$ und Startwert $x_0 = 1$ die drei ersten Glieder der Folge (). Lassen Sie sich anschließend die Wurzel aus 2 von Ihrem Taschenrechner anzeigen und vergleichen Sie x_3 mit der Anzeige Ihres Taschenrechners.

(b) Zeigen Sie: Bei beliebig gewähltem Startwert $x_0 > 0$ gilt $x_n \geq \sqrt{a}$ und die Folge () konvergiert ab $n = 1$ monoton fallend gegen $\sqrt{a}$.

(c) Zeigen Sie, dass der Fehler $f_n := x_n - \sqrt{a}$ abgeschätzt wird $|f_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$. Schließen Sie, dass für x_3 im obigen Beispiel $|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-4} \cdot 10^{-4}$. Auf wieviele Stellen (hinter dem Komma) approximiert also x_3 die Zahl $\sqrt{2}$?

▷ **Aufgabe 3 (Weihnachtsstern der Pythagoräer)** (π Punkte)

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon), tragen die Diagonalen ein, erhalten so ein Pentagramm, und überzeugen sich davon, dass hier gilt

$$\text{Diagonale} : \text{Seite} = \text{Seite} : (\text{Diagonale} - \text{Seite}) \tag{7}$$

<u>Hinweis:</u> Die Diagonalen bilden in der Mitte wiederum ein Pentagon – hilft das weiter?

Benennen Sie

$$g := \text{Diagonale} : \text{Seite} \tag{8}$$

[1] Blatt 10 war die Probeklausur vom 06.01.2014

[2] Aufgaben mit transzendenter Punktezahl sind fakultative Nüsse. Nüsse sind bekanntlich nahrhaft …

und zeigen dass g nicht rational.

Die Zahl g nennt man den *goldenen Schnitt*. Betrachten Sie zum Startwert $x_0 = 1$ die Folge

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \tag{9}$$

und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ mit

$$g = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) . \tag{10}$$

Gehen Sie auf Wikipedia, und lesen dort unter dem Stichwort "Pythagoräer" und "Goldener Schnitt" nach, was es mit den beiden auf sich hat.

▷ Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Folge von Funktionen $(f_n : D \to \mathbb{C})$ heißt *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ der Funktionswerte konvergiert. Ist das der Fall, wird durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) , \quad x \in D \tag{11}$$

die sog. *Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{C}$ definiert. Dabei kann es passieren, dass zwar jedes Folgenglied f_n stetig, die Grenzfunktion f aber unstetig. Dazu ein Beispiel.

Betrachte $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass für jedes n die Funktion f_n stetig auf $[0,1]$, dass aber die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 , \\ 1 & \text{für } x = 1 . \end{cases} \tag{12}$$

unstetig auf $[0,1]$.

▷ Aufgabe 5 (2 Punkte)

Einem Praktikumsbericht entnehmen Sie eine Messdatenkurve, die in doppelt-logarithmischer Auftragung von der Form einer Geraden durch den Punkt $(\xi_0 = 3, \eta_0 = 2)$ mit Steigung $\frac{3}{2}$ ist. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt die Kurve dar? Machen Sie sich ein Bild (Funktionsgraph)! Geben Sie ein Beispiel, wo doppelt-logarithmische Auftragung Sinn macht.

Hinweis: "Doppelt-Logarithmisch heißt, dass beide Achsen logarithmisch geteilt sind, also statt x und y sind $\xi = \log_a x$ und $\eta = \log_a y$ aufgetragen, wobei üblicherweise $a = 10$.

▷ Aufgabe 6 * (4 Punkte)

Es spricht nichts dagegen, für die trigonometrischen Funktionen auch komplexe Argumente zuzulassen. Man erweitere einfach die Definitionen, und setze für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} , \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} . \tag{13}$$

Zeigen Sie: Nach wie vor gilt hier die Euler'sche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z , \tag{14}$$

der Satz des Pythagoras

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \tag{15}$$

und die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \qquad (16)\\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w\,. \qquad (17) \end{aligned}$$

▷ **Aufgabe 7** (4 Punkte)

Ebenso wie die trig-Funktionen könne auch die Hyperbelfunktionen für komplexe Argumente definiert werden,

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \qquad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,. \tag{18}$$

Zeigen Sie: Die Hyperbelfunktionen und die Trigonometrischen Funktionen sind verknüpft

$$\cosh z = \cos(iz)\,, \qquad \sinh z = -i\sin(iz)\,, \tag{19}$$

woraus sich mit Blick auf (16) und (17) Additionstheoreme angeben lassen,

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \qquad (20)\\ \sinh(z+w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w\,, \qquad (21) \end{aligned}$$

und es gilt der hyperbolische Pythagoras,

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,. \tag{22}$$

Die Reihendarstellung entnimmt man der Reihenddarstellung der Exponentialfunktion und Berücksichtigung von (18),

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{23}$$