Anhang 5

W'hlg: Feldtheorie

Viele Feldtheorien sind durch ihre Wirkung definiert

$$S[\phi] = \frac{1}{c} \int_G d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a; x) \tag{5.1}$$

worin $\mathcal{L}$ sog *Lagrangedichte*, $a = 1, \ldots, N$ ein Index der die involvierten Felder durchnummeriert, und $G \subset \mathbb{R}^4$ ein Gebiet der Raumzeit, das im räumlich endlichen von raumartigen Hyperflächen σ_a, σ_b begrenzt ist. In der Elektrodynamik werden die Felder ϕ_i mit den Komponenten A_α des 4er Potentials assoziiert, bei Dirac mit den 4 Komponenten des Dirac-Spinors usw. Die explizite x-Abhängigkeit berücksicht eventuell vorhandene externe Felder $j(x)$, die an die dynamischen Felder koppeln, beispielsweise in der Form $j(x)\phi(x)$. Zunächst aber kurz zur

5.1 Lagrange'sche Feldtheorie

Wir beschränken uns jetzt auf ein relles Feld ϕ, also Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)\,. \tag{5.2}$$

Feldgleichungen folgen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Unter Variation $\phi \to \phi + \delta\phi$ variiert die Wirkung

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_G \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right\} d^4x \overset{!}{=} 0\,. \tag{5.3}$$

Partielle Integration im zweiten Term, Anwendung des Gauss'schen Satzes, dabei beachten $\delta\phi|_{\partial G} = 0$, liefert die gesuchten Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0\,. \tag{5.4}$$

Bringt man hier die Ableitungen nach der Zeit auf die andere Seite

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \tag{5.5}$$

was doch sehr an die Lagrange Form der Newton'schen Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ erinnert.

Ein schönes Beispiel vermittelt die Lagrangedichte der Klein-Gordon Theorie,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2\,. \tag{5.6}$$

Wegen $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$ ist $\partial\mathfrak{L}/\partial(\partial_\mu\phi) = \eta^{\mu\beta}\partial_\beta\phi + \eta^{\alpha\mu}\partial_\alpha\phi = 2\partial^\mu\phi$, damit Feldgleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \mu^2\phi = 0\,, \tag{5.7}$$

mit Identifikation $\mu = mc/\hbar$ Klein-Gordon Gleichung.

Im Falle mehrere Felder ϕ_a, $a = 1, \ldots, N$ die unabhängig voneinander variiert werden,

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_a} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} = 0\,, \qquad a = 1, \ldots, N\,. \tag{5.8}$$

Beispiel doppelte Klein-Gordon

$$\mathfrak{L} = \sum_{a=1,2} \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{\mu^2}{2}\phi_a^2 \tag{5.9}$$

Statt mit reellen ϕ_1, ϕ_2 wird hier gerne mit komplexen Feldern gearbeitet,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right)\,, \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 - i\phi_2\right)\,. \tag{5.10}$$

wobei ϕ und ϕ^* als unabhängige Variable betrachtet werden. Ausgedrückt in komplexen Feldern liest sich die Lagrangedichte ()

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2|\phi|^2 \tag{5.11}$$

Euler-Lagrange zu $\delta\phi*$ lautet

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \mu^2\phi = 0\,. \tag{5.12}$$

während Euler-Lagrange zu $\delta\phi$ gerade das konjugiert-komplexe von (). Angesichts der Umkehrung

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi + \phi^*\right)\,, \qquad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\phi^* - \phi\right)\,, \tag{5.13}$$

sind die partiellen Ableitungen verknüpft

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} - i\frac{\partial}{\partial \phi_2}\right) \tag{5.14}$$

zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial \phi}|\phi|^2 = \phi^* \tag{5.15}$$

5.2 Ergänzung: Funktional und so

Funktional ist eine Abbildung $F : M \to \mathbb{R}$ worin M eine irgendwie interessierende Menge von Funktionen, meist über dem $\mathbb{R}^n$. Um anzudeuten, dass es sich bei F um ein Funktional (eine "Funktion von Funktionen") handelt, schreibt man $F[\phi]$ – also das Argument (die Funktion ϕ) in eine eckige Klammer.

Wichtige Begriffe sind

- *Funktionaldifferential*, notiert δF, erklärt via

$$F[\phi + \delta\phi] = F[\phi] + \delta F[\phi] + O(\delta\phi)^2 \tag{5.16}$$

  in Analogie zur Analysis $f(\xi + \Delta\xi) = f(\xi) + df(\xi) + O(\Delta\xi)^2$.

- *Funktionalableitung* erklärt via

$$\delta F[\phi] = \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) d^n x \tag{5.17}$$

  in Analogie zur Analysis $df(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} d\xi^i$.

Für Funktionale der Form

$$F[\phi] = \int_G \mathcal{F}(\phi(x), \partial_i\phi(x); x) d^n x \tag{5.18}$$

worin die Dichte $\mathcal{F}$ eine (meist algebraische) Funktion von $\phi(x)$, den ersten Ableitungen $\partial_i\phi(x)$, und möglicherweise externen Feldern $j(x)$ (die nicht variiert werden), gilt insbesondere

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi(x)} - \sum_i \partial_i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_i\phi(x))} \tag{5.19}$$

für alle Funktionen ϕ im Definitionsbereich von F, die auf dem Rand ∂G den Wert Null annehmen.

Beweis:

$$F[\phi+\delta\phi] - F[\phi] = \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_i\phi(x))}\partial_i\delta\phi(x) \right\} d^n x \tag{5.20}$$

$$= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi(x)} - \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_i\phi(x))} \right) \right\} \delta\phi(x) d^n x + \int \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_i\phi(x))}\delta\phi(x) \right) d^n x \tag{5.21}$$

Das zweite Integral kann via Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral von $(\ldots)$ über ∂G umgeformt werden. Da nach Voraussetzung $\phi|_{\partial G} = 0$, und also insbesondere $\delta\phi|_{\partial G} = 0$ (denn neben ϕ muss auch $\phi + \delta\phi$ im Definitionsbereich von F liegen), liefert das Oberflächenintegral keinen Beitrag. Vergleich von () mit () liefert dann den Satz ().

Sei beispielsweise

$$F[\phi] := \int j(x)\phi(x) d^n x \tag{5.22}$$

dann

$$F[\phi+\delta\phi] = \int j(x)\phi(x)d^nx + \int j(x)\delta\phi(x)d^nx \tag{5.23}$$

und also

$$\delta F = \int j(x)\delta\phi(x)d^nx \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = j(x) \tag{5.24}$$

Eine schöne Anwendung vermittelt das Funktional $F[\phi] = \int \delta^n(y-x)\phi(x)d^nx$. worin $\delta^n(y-x)$ die Delta-Funktion im n-dimensionalen Raum. Offenscithlich liefert F den Funktionswert von ϕ an der Stelle y, kurz $F[\phi] = \phi(y)$. Statt $\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x)$ schreibt man hier gerne

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x) \tag{5.25}$$

in Analogie zu $\frac{\partial\xi^j}{\partial\xi^i} = \delta^j{}_i$ (Kroneckerdelta) in der Analysis.

Anhang 6

Noether und so

6.1 Energie-Impuls Tensor

Für festes Feld ϕ ist $\mathcal{L}$ Funktion von x, non-chalant notiert

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); x) \,. \tag{6.1}$$

Die explizite x-Abhängigkeit berücksichtigt eventuell vorhandene externe Felder, etwa in der Form $j(x)\phi(x)$.

Ableitung nach x^ν

$$\begin{aligned} \partial_\nu \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\partial_\nu \phi + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \partial_\mu \phi + \partial_\nu^{\text{explizit}}\mathcal{L} \qquad (6.2)\\ &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\mu \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \partial_\nu \phi \\ &\quad + \sum_\mu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) + \partial_\nu^{\text{explizit}}\mathcal{L} \qquad (6.3) \end{aligned}$$

Für "wahres" ϕ – also ϕ, das den Feldgleichungen genügt – ist hier $\{\ldots\} = 0$. Der Rest kann zusammengefasst werden

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = -\partial_\nu^{\text{explizit}}\mathcal{L} \qquad (6.4)$$

worin T der sog *Energie-Impulstensor*,

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \phi - \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \qquad (6.5)$$

Für $\partial^{\text{explizit}}\mathcal{L} = 0$ bedeutet $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ vier lokale Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichungen),

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{i\nu} = 0\,, \qquad \nu = 0,1,2,3\,. \qquad (6.6)$$

Räumliche Integration unter Verwendung des Gauss'schen Satzes und Annahme, dass die Felder für $|\vec{x}| \to \infty$ verschwinden, liefert globale Erhaltungssätze für des Feldes Gesamt-Energie P^0 und -Impuls P^i,

$$\begin{aligned} P^0 &:= \int T^{00} d^3x\,, \qquad \frac{d}{dt}P^0 = 0\,, \qquad (6.7)\\ P^i &:= \int T^{0i} d^3x\,, \qquad \frac{d}{dt}P^i = 0\,. \qquad (6.8) \end{aligned}$$

Erhaltungssätze sind Spezialfall eine allgemeinen Theorems von Emmy Noehter (vgl. nächster Abschnitt): jede kontinuierliche Symmetrie impliziert eine Erhaltungsgröße. Sie kennen das schon aus der klassischen Mechanik: zeitliche Translationsinvarianz (hier: $\partial_0^{\text{explizit}}\mathcal{L} = 0$) impliziert Energieerhaltung, räumliche Translationsinvarianz (hier: $\vec{\nabla}^{\text{explizit}}\mathcal{L} = 0$) impliziert Imuulserhaltung.

Beispiel Klein-Gordon

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu\phi)(\partial^\nu\phi) - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{6.9}$$

Insbesondere

$$T^{00} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 \tag{6.10}$$

$$T^{0i} = -\frac{1}{c^2}\dot{\phi}\partial_i\phi \tag{6.11}$$

Der in () eingeführte Energie-Impulstensor ist nicht unbedingt symmetrisch, kann aber durch Addition eines geeigneten Tensors immer symmetrisiert werden. Im Unterschied zum sog *kanonischen* Energie-Impulstensor spricht man dann vom *symmetrischen* Energie-Impulstensor. Solch Vorgehen ist statthaft – schließlich kommt es nur auf die Kontinuitätsgleichung an. Symmetrie des Energie-Impulstensors ist für weitergehende Eigenschaften lokaler Feldtheorien – insbesondere die Allgemeine Relativit—ätstheorie und die Quantenfeldtheorien der Elementarteilchen – von wesentlicher Bedeutung.

Achtung: Energie-Impulstensor nicht eindeutig. Sei $\psi^{\beta\alpha\gamma} = -\psi^{\beta\gamma\alpha}$ irgendein partiell-antisymmetrischer Tensor. Dann hat $T^{\beta\alpha} := \tilde{T}^{\beta\alpha} + \partial_\gamma\psi^{\gamma\alpha\beta}$

6.2 Noether

Eine Transformation $T : \phi \to \phi' = T(\phi)$ definiert eine *innere* Symmetrie, wenn die transformiert Wirkung $S'[\phi'] := S[T(\phi')]$ invariant unter der Transformation, also $S' = S$, äquivalent $S[\phi'] = S[\phi]$.

Beispiel: Klein-Gordon ist invariant unter Feldspiegelung $\phi \to \phi' = -\phi$, nicht aber unter Verschiebung des Feld-Nullpunkts $\phi \to \phi' = \phi + \epsilon$.

Eine 1-parametrige Schar von Transformationen T_ϵ, $\epsilon \in \mathbb{R}$, normiert $T_{\epsilon=0} = \mathrm{id}$, heißt kontinuierlich, falls $S[T_\epsilon(\phi)]$ stetig von ϵ abhängt. Gilt hier $S[T_\epsilon(\phi)] = S[\phi]$ definiert die Schar T_ϵ eine kontinuierliche innere Symmetrie des Systems. Jede kontinuierliche Symmetrie, so ein Theormen von Emmy Noether, impliziert eine Erhaltungsgröße.

Hinreichend für das Vorliegen einer inneren Symmetrie ist ein Transformationsverhalten der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) + \partial_\mu J^\mu \tag{6.12}$$

worin (J^μ) ein 4er Vektor mit $J|_{\partial G} = 0$. Die Wirkung bleibt von der 4er Divergenz unbeeinflusst – schließlich kann sie über die Gauss'schen Satz in ein Integral über die Oberfläche verwandelt werden, dessen Wert aber wegen $J|_{\partial G} = 0$ gleich Null.

Sei also $\mathcal{L}$ im Sinne () invariant unter T_ϵ. Für kleine ϵ ist dann

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \epsilon_a(x) \tag{6.13}$$

worin $\epsilon_a(x)$ klein von Ordnung ϵ. Damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu\phi'_a) - \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) &\approx \sum_a \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\epsilon_a + \sum_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu\epsilon_a \right\} \qquad (6.14)\\ &= \sum_a \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right] \epsilon_a \\ &\quad + \sum_\mu \partial_\mu \left(\sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\epsilon_a \right) \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Für wahre Felder ist hier $[\ldots] = 0$. Führt man abkürzend ein,

$$j^\mu := \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\epsilon_a - J^\mu \qquad (6.16)$$

impliziert Invarianz ()

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,. \qquad (6.17)$$

Entsprechend ist die sog *Noether-Ladung*

$$Q(t) := \int j^0(\vec{x}, t) d^3x \qquad (6.18)$$

eine Erhaltungsgröße,

$$\frac{d}{dt}Q = 0\,. \qquad (6.19)$$

Beispiel komplexe Klein-Gordon. Lagrandgedichte invariant (mit $\partial_\mu J^\mu = 0$) unter $\phi \to \phi' = e^{i\epsilon}\phi$, $\phi^* \to \phi^{*\prime} = e^{-i\epsilon}\phi^*$; für kleine ϵ ist $\delta\phi = i\epsilon\phi$ und $\delta\phi^* = -i\epsilon\phi^*$. Noether-Stromdichte

$$j^\mu = i\left[(\partial^\mu\phi^*)\,\phi - \phi^*\,(\partial^\mu\phi) \right] \qquad (6.20)$$

und Noether-Ladung

$$Q = i \int \left(\dot{\phi}^* \phi - \phi^* \dot{\phi} \right) d^3x \tag{6.21}$$

erhalten,

$$\frac{d}{dt} Q = 0 \,. \tag{6.22}$$

Anhang 7

Hamilton'sche Feldtheorie

Quantenmechanik – Sie erinnern sich – basiert auf der Hamilton's chen Formulierung der Mechanik. Der Hamiltonian ist allerdings kein "kovariantes" Konzept – die Energie transformiert unter Lo'tra wie die 0-Komponente einer 4er Vektors. Hamilton'sche (Quanten)Feldtheorie kommt daher – verglichen mit der Lagrange'schen Feldtheorie – etwas unbeholfen daher.

Am Anfang steht die Wahl eine Koordinatensystems mit Auszeichnung einer Zeitkoordinate t, so dass Hyperflächen $\sigma_{a,b}$ Gleichzeitigkeitsschnitte $\sigma_{a,b} = (t_{a,b}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Wirkung

$$S[\phi] = \int_{t_a}^{t_b} L[\phi, \dot{\phi}]dt \tag{7.1}$$

worin L Lagrangefunktional

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t))d^3x \tag{7.2}$$

Achtung: Lagrangefunktional für festes t definiert, daher ϕ und $\dot{\phi}$ unabhängige Zustandsgrößen (in kl Mechanik entsprechend q und $\dot{q}$).

In Analogie zur Punktmechanik kanonisch konjugierter Impuls

$$\pi(\vec{x},t) := \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\vec{x},t)} \tag{7.3}$$

und Hamiltonfunktional

$$H[\phi,\pi] = \int \pi(\vec{x},t)\dot{\phi}(\vec{x},t) d^3x - L \tag{7.4}$$

Feldgleichungen

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\pi}\,, \qquad \frac{\partial\pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\phi} \tag{7.5}$$

Dabei beachten $\delta H/\delta\phi = \partial\mathcal{H}/\partial\phi - \vec{\nabla}\partial H/\partial(\vec{\nabla}\phi)$ – vgl. Gl. ().

Formulierung mittels Poissonklammern `[LL(I)-Konvention, S. 166]`

$$\{f,g\} := \int \left[\frac{\delta f}{\delta\pi(\vec{x},t)}\frac{\delta g}{\delta\phi(\vec{x},t)} - \frac{\delta g}{\delta\pi(\vec{x},t)}\frac{\delta f}{\delta\phi(\vec{x},t)}\right] d^3x \tag{7.6}$$

Insbesondere

$$\{\pi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,, \tag{7.7}$$
$$\{\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)\} = \{\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)\} = 0\,, \tag{7.8}$$

sog *kanonische Poissonklammern*. Damit

$$\dot{\phi}(\vec{x},t) = \{H,\phi(\vec{x},t)\} \tag{7.9}$$
$$\dot{\pi}(\vec{x},t) = \{H,\pi(\vec{x},t)\} \tag{7.10}$$

Beispiel Klein-Gordon (reelles ϕ); Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2$, ergo

$$\begin{aligned} \pi(\vec{x},t) &\equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\vec{x},t)} = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\vec{x},t)\,, && (7.11) \\ \mathcal{H} &= \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 && (7.12) \end{aligned}$$

Interpretiert: Energie gespeichert in Bewegung (zeitliche Änderung), räumlicher Modulation, und generelle Anwesenheit (= Auslenkung aus "Ruhelage $\phi = 0$").

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi} &= \tfrac{\delta H}{\delta \pi} = c^2\pi \\ \dot{\pi} &= -\tfrac{\delta H}{\delta \phi} = \Delta\phi - \mu^2\phi \end{aligned}\right\} \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + \mu^2\phi = 0\,. \qquad (7.13)$$

wie gehabt.