Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2013/2014) -

Übungsblatt 1

Ausgabe 15.10.13 – Abgabe 24.10.13– Besprechung 25.10.13

▷ Aufgabe 1 (Eine Pico-Einführung in die Feldquantisierung)

Zunächst eine kleine Erinnerung an die klassische Elektrodynamik: In Raumbereichen wo sich keine Ladungen und Ströme befinden genügt das elektromagnetische Feld den Maxwellschen Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = c^{-2}\dot{\vec{E}}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, und die in einem Volumen V gespeicherte elektromagnetische Energie berechnet sich zu

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left[\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right] d^3x \,. \tag{1}$$

(a) Bestätigen Sie: Für eine stehende elektromagnetische Welle, $\vec{E}(\vec{x}, t) = E(t)\vec{e}_y \cos(kx)$, $\vec{B}(\vec{x}, t) = B(t)\vec{e}_z \sin(kx)$ impliziert M'wll Bewegungsgleichungen für die Amplituden $\dot{E} = \omega c B$, $c\dot{B} = -\omega E$, wobei $\omega = ck$.

(b) Bestätigen Sie: Mit der Bezeichnung $Q := cB/A$, $P := E/A$, worin $A = \sqrt{2\omega/(\varepsilon_0 V)}$, lesen sich die Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q} = \omega P \,, \qquad \dot{P} = -\omega Q \,, \tag{2}$$

und es ist $U \equiv H(P, Q)$ mit

$$H(P, Q) = \frac{\omega}{2} \left(P^2 + Q^2 \right) \tag{3}$$

Hamiltonfunktion zu (2).

(c) Wagen Sie den Schritt zur Verallgemeinerung: Jeder Mode des Strahlungfeldes entspricht ein harmonischer Oszillator dessen Frequenz durch die Frequenz der Mode gegeben ist. Die Auslenkung Q entspricht der magnetischen Feldamplitude der jeweiligen Mode und der kanonisch konjugierte Impuls P entspricht ihrer elektrischen Feldamplitude.

(d) Quantisieren Sie nun das Feld der o.a. elektromagnetischen Welle – also: Hüte auf die Phasenraumfunktionen Q und P (damit aus Ihnen veritable Operatoren werden), und die Poissonklammern durch Kommutatoren ersetzen, genauer: $\{\cdot, \cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{\cdot}, \hat{\cdot}]$. Was ergibt sich für den Kommutator der elektrischen und magnetischen Amplitude (in SI-Einheiten), und wie stellt sich die Heisenberg'sche Unschärferelation der beiden dar?

(e) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators der Mode. In der "Orstdarstellung" – welche physikalische Bedeutung hat die "Ortskoordinate"? Nach einer Fouriertransformation – welche physikalische Bedeutung hat die "Impulskoordinate"?

▷ Aufgabe 2 (Ehrenfest'sche Theoreme)

Bewegen sich die Zustände, so bewegen sich auch die Erwartungswerte. Für den Massepunkt mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ beweisen Sie bitte

Satz (Ehrenfest'sches Theorem I) Die klassische Bewegungsgleichung der Newton'schen Mechanik gilt *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{F}\rangle \tag{4}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial\hat{q}}\,. \tag{5}$$

Genießen Sie hier die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton'sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle\hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise. Es gilt nämlich der

Satz (Ehrenfest'sches Theorem II) Für genügend langsam veränderlicher Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\Delta^2_\psi(\hat{q})F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{6}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle\hat{q}\rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$.

"Genügend langsam veränderlich" heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle\hat{q}\rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ Aufgabe 3 (Galilei-Schub)

Wir betrachten die Galileitransformation (reiner Schub mit Geschwindigkeit $\vec{V}$)

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t\,, \qquad t' = t \tag{10}$$

(a) Beweisen Sie: Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ genügt genau dann der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) \tag{11}$$

wenn die transformierte Wellenfunktion

$$\tilde{\psi}(\vec{x}',t') := e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{V}^2}{2}t - i\frac{m\vec{V}}{\hbar}\cdot\vec{x}'}\psi(\vec{x}' + \vec{V}t', t') \tag{12}$$

der Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\tilde{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\tilde{\psi}(\vec{x}',t') + V(\vec{x}' + \vec{V}t', t') \tag{13}$$

genügt.

Anders ausgedrückt: die Abbildung $D(g) : (\vec{x}, t, \psi) \mapsto (\vec{x}', t', \tilde{\psi})$ ist Darstellung D einer Galileitransformation g.

Da sich für freie Teilchen die Form der Hamiltonfunktion unter $D(g)$ nicht ändert, sagt der Hamilton sei invariant unter Galileitrafos.

(b) Sie erinnern sich – die W'keitstromdichte ist definiert $\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)(\vec{x}, t)$. Zeigen und interpretieren Sie, dass unter einer Galileitrafo

$$\tilde{\vec{j}} = -\vec{V}|\psi|^2 + \vec{j}\,. \tag{14}$$

▷ Aufgabe 4 (Zeitumkehr)

Zeigen Sie. Genügt $\psi(x, t)$ der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\psi}(\vec{x}, t) = \{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\}\psi(\vec{x}, t)$, dann auch $\psi'(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t)$. Was ist die Bedeutung von ψ'? Ist die Transformation von ψ nach ψ' unitär oder antiunitär?

▷ Aufgabe 5 (Neutronenstern (klein))

Gegeben zwei Neutronen, die nur gravitativ über das Potential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{Gm^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{15}$$

wechselwirken, wobei G die Gravitationskonstante und m die Neutronenmasse.

(a) Bestimmen Sie die gebundenen Zustände und deren Energiewerte.

(b) Geben Sie den effektiven Radius des Systems im Grundzustand in Einheiten des Bohr'schen Radius der Atomphysik. Irgendwelche Aussichten, jemals unseren Neutronenstern zu beobachten?

Hinweis: Neutronen – sind das nicht identische Fermionen? . . .

▷ Aufgabe 6 (Messen und präparieren)

Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, die im polarisierten Zustand $|\uparrow_x\rangle$ präpariert sind, werden in einem Stern-Gerlach Magneten einer σ_z Messung unterworfen.

(a) In welchem Zustand befinden sich die Teilchen nachdem sie den SGM verlassen haben?

(b) In welchem Zustand befinden sich die Teilchen, nachdem sie das SGM mit einem blockierten unteren Kanal verlassen haben?

(c) Wie lauten die Antworten zu (a) und (b) für Teilchen, die im unpolarisierten Zustand präpariert sind? Wie könnte man überhaupt einen unpolarisierten Zustand präparieren?