Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2013/2014) -

Übungsblatt 5

Ausgabe 13.12.13 – Abgabe: vor 20.12.13 – Besprechung 20.12.13

▷ **Aufgabe 1**

Die Bewegungsgleichung einer Punktladung (Masse m, Ladung e) im elektromagnetischen Feld, daran sei erinnert, liest sich in einem Laborsystem

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \tag{1}$$

wobei $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}(t), t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}(t), t)$ und $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

(a) Überzeugen Sie sich, dass Gleichung (1) nicht anderes als die Euler-Lagrangegleichung einer Wirkung

$$S = \int_a^b \{-mcds - eA_\alpha dr^\alpha\} \tag{2}$$

worin (A^α) das 4-erPotential des Feldes, (dr^α) Inkrement eines Minkowskiweges, der vom Ereignis a zum Ereignis b führt, und $ds = \sqrt{|dr_\alpha dr^\alpha|}$ die entsprechende Minkowskilänge des Inkrements (ds/c ist das Eigenzeitinkrement längs des fraglichen Minkowkiweges).

<u>Hinweis:</u> Die Wirkung ist ist hier so formuliert, dass ihr relativistisch invarianter Charakter klar zu Tage tritt. Für die Bestimmng der Bewegungsgleichungen im Laborsystem, wo $(A^\alpha) = (\Phi/c, \vec{A})$ und $(dr^\alpha) = (cdt, d\vec{r}(t))$, ist es geraten, die Wirkung umzuformulieren $S = \int_{t_a}^{t_b} Ldt$ mit der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} + e\vec{A}\cdot\vec{v} - e\Phi \tag{3}$$

Im übrigen tut man gut daran, sich an den Zusammenhang von Potential und Feld zu erinnern, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, und zu beachten, dass in Gl. (3) $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$ bzw. $\Phi = \Phi(\vec{r}(t), t)$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass der kanonische Impuls

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + e\vec{A} \tag{4}$$

die Energie

$$E \equiv \vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + e\Phi \tag{5}$$

und also die Hamiltonfunktion

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2} + e\Phi \tag{6}$$

(c) Benutzen Sie das Korrespondenzprinzip $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ um die Klein-Gordongleichung eines elektrisch geladenen Punktteilchens im elektromagnetischen Feld abzuleiten.

Quantenmechanisch wird die Bewegung eines Teilchens der Ladung e im elektromagnetischen Feld, Sie erinnern sich, in der minimalen Kopplung beschrieben, indem man Differentialoperatoren der “freien Wellengleichung” ersetzt $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi$ und $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}$. Mittels 4er Impuls $(p^\nu) \equiv (E/c, \vec{p})$ und 4er Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$ daher (beachte Stellung des 4-er Index)

$$p_\nu \to i\hbar\partial_\nu - eA_\nu \tag{7}$$

Das passt übrigens ganz gut: Ableitung nach kontravarianten Koordinaten x^μ gibt kovariante Komponenten.

(d) Zeigen Sie, dass mit dieser Vorschrift die bereits in (c) gefundene Klein-Gordongleichung die Form annimmt

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0\,. \tag{8}$$

worin

$$D_\mu := \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \tag{9}$$

die sog. *kovariante Ableitung.*

Bemerkung: Das “Kovariieren” bezieht sich dabei aber nicht auf das Verhalten unter Lo’tra, sondern bezieht sich auf das Transformationsverhalten unter Eichtransformationen,

$$\phi \quad \to \quad \phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}\phi\,, \tag{10}$$

$$A_\mu \quad \to \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \tag{11}$$

gemäß

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}D_\mu\phi \tag{12}$$

Kurz: die kovariante Ableitung von Feld ϕ (die Ableitung mit D) transformiert unter Eichtrafos genauso wie Feld selber (die einfache partielle Ableitung tut das nicht).

(e) In Analogie zur freien Klein-Gordongleichung: Wie lautet die Ladungsbilanz in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes?

▷ Aufgabe 2 (Klein’sches Paradox)

Die Streuung an der Potentialschwelle, Sie erinnern sich, ist eine beliebte Übungsaufgabe der nicht-relativistischen Quantenmechanik.

Um die Sache nicht unnötig zu komplizieren untersuchen wir die Streuung geladener Klein-Gordon Teilchen in einer Dimension. Zuständig ist die Klein-Gordongleichung

$$\left\{\frac{1}{c^2}\left(\partial_t + ie\Phi(z)\right)^2 - \partial_z^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\phi(z,t) = 0 \tag{13}$$

worin $\Phi(z)$ die Potentialschwelle

$$\Phi(z) = \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ \Phi_0\,, & z > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Analysieren Sie die Streung monoergetischer Teilchen der Energie E die von links einfallen, also $\Phi_{\text{in}}(z,t) = e^{-iEt/\hbar+ikz}$. Bestimmen Sie Reflektions- und Transmissionkoeffizienten R und $T = 1-R$ der Schwelle. Wenden Sie Ihre Augenmerk auf den Fall der "hohen Schwelle" $e\Phi_0 > E + mc^2$, überzeugen sich, dass in diesem Fall $R > 1$ und $T < 0$, und suchen Sie diesen merkwrdigen Befund des sog Klein'schen Paradox zu interpretieren.