Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2013/2014) -

Übungsblatt 6

Ausgabe 10.01.14 – Abgabe: vor 24.01.14 – Besprechung 24.01.14

▷ Aufgabe 1 (Omnipräsenz der negativen Energien)

Betrachten Sie ein freies Dirac-Teilchen das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\psi(\vec{x}, t = 0) = \frac{1}{[2\pi a^2]^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/(4a^2)+i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

beschrieben wird, also "Gauss'sches Wellenpaket" ausschließlich positiver Energie-Komponenten.

Zeigen Sie durch Lösen des Anfangswertproblems der freien Dirac-Gleichung: (a) Zu einem späteren Zeitpunkt entwickelt ψ Anteile negativer Energie. (b) Die Anteile werden $O(1)$, wenn a von der Größenordnung oder kleiner als die Comptonwellenlänge.

Merke: Versucht man Teilchen besser als ihre Comptonwellenlänge zu lokalisieren wird man mit relativistischen Effekten konfrontiert.

▷ Aufgabe 2 (Zitterbewegung von Dirac-Teilchen)

Zitterbewegung bezeichnet die scheinbar zittrige Bewegung eines freien Dirac Teilchens. Statt im Schrödingerbild, analysieren wir hier die Zitterbewegung im Heisenbergbild. Im Heisenbergbild bewegen sich die Operatoren gemäß[1]

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[O(t), H] \ , \tag{2}$$

mit H Dirac Hamiltonoperator,

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 \, . \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0 \, , \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \equiv \vec{v}(t) = c\vec{\alpha}(t) \, , \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} = \frac{2}{i\hbar}\left(c\vec{p} - H\vec{\alpha}(t)\right) \, . \tag{6}$$

(b) In der Vorlesung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Eigenwerte der α-Matrizen gleich ± 1, und es wurde geschlossen, dass Diracteilchen sich daher nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können. Erlaubt die Quantenmechanik, diesen Befund experimentell zu verifizieren? Falsifizieren?

[1] Um die Notation nicht unnötig aufzublähen verzichten wir auf die Hüte auf den Operatoren.

(c) Bestätigen Sie durch Integration der Bewegungsgleichungen (4)–(6),

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c^2\vec{p}}{H}t + \frac{\hbar c}{2i}H^{-1}\left(e^{2iHt/\hbar} - 1\right)\left(\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}\right) . \tag{7}$$

(d) Identifizieren Sie in (7) den Term, der der Bewegung eines Welllenpakets mit der Gruppengeschwindigkeit entspricht.

(e) Analysieren Sie den oszillierenden Term in (7), der der Zitterbewegung entspricht. Bestätigen Sie, dass die Zitterbewegung von der Interferenz von Zuständen positiver und negativer Energie herrührt.
Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass der Operator $\vec{\alpha}(0) - \frac{c\vec{p}}{H}$ nur zwischen Zuständen mit gleichem Impuls nichtverschwindende Matrixelemente besitzt. Schließen Sie sodann aus $\vec{\alpha}H + H\vec{\alpha} = 2c\vec{p}$ (Beweis!), und also $(\vec{\alpha} - \frac{c\vec{p}}{H})H + H(\vec{a} - \frac{c\vec{p}}{H}) = 0$, dass die Energien entgegengesetzt sein müssen.

▷ Aufgabe 3 (Adiabatische Elimination)

Gegeben 2 lineare, gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$i\dot{\varphi} = \delta\varphi + \varepsilon\chi \tag{8}$$
$$i\dot{\chi} = \varepsilon^*\varphi - m\chi \tag{9}$$

mit komplexer Konstanten ε und reellen Konstanten m, δ.

Zeigen Sie, dass für $|m| \gg |\varepsilon|, |\delta|$ und bestimmte Anfangsbedinungen (welche?) die "langsame" Variable φ (woher diese Bezeichung?) die "schnelle" Variable χ (woher nun diese Bezeichung?) "versklavt" (nun auch *das* noch ...),

$$\chi(t) \approx \frac{\varepsilon^*}{m}\varphi(t) , \tag{10}$$

und die langsame Variable in führender Ordnung (welcher Entwicklung?) einer Differentialgleichung

$$i\dot{\varphi} = \left(\delta + \frac{|\varepsilon|^2}{m}\right)\varphi \tag{11}$$

genügt, die nun wirklich leicht zu lösen ist.

Bemerkung: Mit der hier einstudierten "Methode der adiabatischen Elimination" haben Sie was für's Leben. Sie gestattet Ihnen beispielsweise, blitzschnell die Pauligleichung aus dem nicht-relativistischen Grenzfall der Dirac-Gleichung abzuleiten.

▷ Aufgabe 4

Gegeben eine Lagrangefunktion

$$L = \frac{i\hbar}{2}(z^*\dot{z} - z\dot{z}^*) - \tilde{f}(z, z^*) \tag{12}$$

worin z komplexe Variable und f reell.

(a) Man bestimme die Euler-Lagrangegleichung zu L. Man überzeuge sich, dass bei Vorgabe von $z(t_0)$ die Zeitentwicklung des Systems vollständig bestimmt ist, es daher redundante dynamische Variable in L gibt (d.h. die Variable $z, z*, \dot{z}, \dot{z}^*$ sind nicht unabhängig).

(b) Man bestimme die Funktion

$$H = \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \dot{z}^* \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} - L\,, \tag{13}$$

und überzeuge sich insbesondere

$$H = f(z, z^*)\,. \tag{14}$$

Bemerkung: *Wären* die Koordinaten und Geschwindigkeiten, also $z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*$ unabhängig, *wäre* H automatisch die Hamiltonfunktion des Systems. Nun sind die genannten Koordinaten zwar nicht unabhängig, aber H erweist sich dennoch als die "richtige" Hamiltonfunktion. Um das zu sehen, muss man leider ein bisschen rumfummeln. Was in den nächsten Aufgabenteilen geschieht ...

(c) Man setze $z = x+iy$ wo x, y reell, schreibe die Lagrangefunktion (12) in den Variablen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, und eliminiere die $\dot{y}$-Abhängigkeit durch Addition einer geeignet gewählten totalen Zeitableitung, $L'(x, \dot{x}, y) = L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \frac{d}{dt}u(x, y)$. Bestimmen Sie $u(x, y)$.

(d) Um anschließend auch noch die y-Abhängigkeit los zu werden, stelle man die Euler-Lagrange-Gleichungen zu L' für y auf, löse diese nach y auf, $y = y(x, \dot{x})$, setze die Lösung in L' ein, $L''(x, \dot{x}) = L'(x, \dot{x}, y(x, \dot{x}))$, überzeuge sich $\partial L''/\partial \dot{x} = \partial L'/\partial \dot{x}$, insbesondere

$$p \equiv \frac{\partial L''}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 2\hbar y \tag{15}$$

mit $y = y(x, \dot{x})$, bastele sich nach den üblichen Vorschriften die Hamiltonfunktion (hier nun genannt H''), und erfreue sich an (es ist $g(x, y) = f(z, z^*)$)

$$H'' = g(x, y) = g(x, p/(2\hbar))\,. \tag{16}$$

Um sich endgültige Gewissheit zu verschaffen, dass man sich nicht verrechnet hat, sollte man sicherheitshalber noch mal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu (16) aufstellen, und sich überzeugen, dass sie den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu L gleichen ...

(e) Die Quantisierung ist nun schnell erledigt: Hüte auf die Variablen, und den kanonischen Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ postulieren. Angesichts (15) impliziert der kanonische Kommutator $[\hat{x}, \hat{y}] = \frac{i}{2}$, und infolge dessen

$$[\hat{z}, \hat{z}^\dagger] = 1\,. \tag{17}$$

Ein flüchtiger Vergleich von (14) mit (16) genügt um zu erkennen: H und H'' sind gleich! Hätte man sich den ganzen Zirkus (c) und (d) also sparen können? Nicht ganz. Ein ebenso flüchtiger Blick lehrt nämlich auch, dass $\partial L/\partial z$ leider kein kanonisch konjugierter Impuls zu z, denn $\left[z, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right] = \frac{i\hbar}{2}$ (und nicht $i\hbar$ wie es sein sollte).

Bemerkung: Im Gegensatz zu den üblichen Lagrangefuntkionen der klassichen Mechanik ist die vorliegende Lagrangefunktion linear in den Geschwindigkeiten. Von solchem Typ ist auch die Lagrangefunktion der Schrödinger'schen Wellenmechanik und der Diractheorie. Charakteristisch ist dabei, dass nicht – wie hier naiverweise zu erwarten – vier unabhängige Variable vorliegen – etwa z und $\dot{z}$ – sondern nur zwei.