

Kapitel 2

Stationäre Streutheorie

Aufbau und Zusammensetzung von Materie werden häufig in Streu- bzw Stoßexperimenten ermittelt, denken Sie nur an das Elektronenmikroskop oder die großen Beschleunigeranlagen im DESY bzw. CERN. Ein Streuexperiment besteht aus einer Quelle, die einen Teilchenstrahl von sog. *Probeteilchen* zur Verfügung stellt, einem Target und einem Nachweissystem für die gestreuten Probeteilchen. Ein Stoßexperiment ist ähnlich aufgebaut, nur dass das Target nicht fest steht sondern selbst ein bewegliches Teilchen ist. Die Analyse eines zwei-Teilchen Stoßes kann aber glücklicherweise durch Transformation auf das Schwerpunktsystem auf das Problem der Streuung von Probeteilchen an einem festen Target zurückgeführt werden, nur dass das Probeteilchen halt ein *Quasiteilchen* dessen Masse durch die reduzierte Masse gegeben ist, und dessen Koordinaten die Relativkoordinaten des ursprünglichen zwei-Teilchen-Systems.

Man unterscheidet elastische und inelastische Streuung. Bei der elastischen Streuung ändert sich weder der innere Zustand des Target noch des Probeteilchens, während

Die Hamiltonfunktion des Zwei-Teilchen Problems

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (2.1)$$

nimmt in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{R} &:= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} & \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{P} &:= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 & \vec{p}_1 &= \vec{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{P} \\ \vec{r} &:= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{p} &:= \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2} & \vec{p}_2 &= -\vec{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{P} \end{aligned} \quad (2.2)$$

die Form an

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{r}|), \quad (2.3)$$

wo M die Gesamtmasse, und m die reduzierte Masse

$$M = m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

Der Hamiltonoperator (2.3) separiert in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Die Allgemeine Lösung der Schrödingergleichung $i\hbar|\Psi_t\rangle = \hat{H}|\Psi_t\rangle$ ist demnach eine Linearkombination von Produktzuständen der Form $|\chi_t\rangle \otimes |\psi_t\rangle$ worin $|\chi_t\rangle$ Element des Hilbertraums der Schwerpunktbewegung, und $|\psi_t\rangle$ Element des Hilbertraums der Relativbewegung.

sich bei der inelastischen Streuung die inneren Zustände der beteiligten Streupartner ändern können.

Außerdem kann ein Stoß mit dem Zerfall oder der Synthese von Teilchen einhergehen – denken Sie nur an die Kollision eines Elektrons mit einem Positron. Neben der Erzeugung zweier Gamma-Quanten und der damit verbundenen “Paarvernichtung” gibt es hier eine Vielzahl von *Reaktionskanälen* in denen Hadronen erzeugt werden, die sich in den sog *jets* in den großen e^+e^- -Kollidern manifestieren.

Hier konzentrieren wir uns auf die einfache elastische Streuung – genauer: auf die elastische Potentialstreuung spinloser Teilchen.

Zuständig ist die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [\hat{H}_0 + \hat{V}]|\Psi(t)\rangle \quad (2.5)$$

worin $|\Psi(t)\rangle$ der quantenmechanische Zustand des Probeteilchens, \hat{H}_0 der Operator seiner kinetischen Energie,

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (2.6)$$

und $\hat{V} = \hat{V}(\hat{q})$ das Potential der Wechselwirkung mit dem Target, kurz *Streupotential*.¹

Der Ursprung des Koordinatensystems wird zweckmäßigerweise so gewählt, dass er mit dem Streuzentrum zusammenfällt. Weiterhin darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass das Potential und seine Ableitungen (=Kraft)

¹Die Bezeichnung Streupotential soll hier nicht darüber hinwegtäuschen, dass der Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ durchaus auch gebundene Zustände aufweisen kann. Betont werden soll mit dieser Bezeichnung lediglich, dass man in der Streutheorie vornehmlich an der Ablenkung freier Teilchen interessiert ist, und weniger an den Eigenschaften gebundener Zustände.

im Limes $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell den Wert Null annehmen, Teilchen mit Energie $E \geq 0$ sich außerhalb der Reichweite des Potentials also frei bewegen können.

2.1 Streuamplitude und Streuquerschnitt

Für streng monoenergetische Teilchen $|\Psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi_E\rangle$, worin E die Energie der Teilchen, und $|\psi_E\rangle$ Lösung der stationären Schrödingergleichung (wir unterdrücken das Subskript E),

$$[\hat{H}_0 + \hat{V}]|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (2.7)$$

Da allerdings E im kontinuierlichen Spektrum von $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, ist $|\psi\rangle$ sicher nicht im Hilbertraum, die Gleichung (2.7) also streng genommen eine Bestimmungsgleichung für eine Distribution, nicht für einen Vektor.

Schon für $\hat{V} = 0$ hat (2.7) für festes $E > 0$ überabzählbar viele Lösungen $|\vec{k}\rangle$, $\hbar^2\vec{k}^2/(2m) = E$. Um eine eindeutige Lösung anzugeben, muss (2.7) durch eine Randbedingung ergänzt werden bei der beispielsweise vorgegeben wird, wie sich $\psi(\vec{x}) := \langle \vec{x}|\psi\rangle$ asymptotisch für $r := |\vec{x}| \rightarrow \infty$ verhält. Für die Belange der Streutheorie bewährt hat sich die *Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung*.

$$\psi(\vec{x}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.8)$$

worin \vec{k} der Wellenvektor der einfallenden Welle, vom Betrag

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad (2.9)$$

und f – genannt die *Streuamplitude* – für gegebenes E , \hat{V} und \vec{k} lediglich eine Funktion der Richtung \vec{x}/r .

Da der erste Summand in (2.8) der freien Schrödingergleichung genügt nimmt er vom Streupotential keine Notiz und kann daher mit der Präparation assoziiert werden, im vorliegenden Fall der Präparation einer Gesamtheit mit scharfem Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Der zweite Summand entlarvt sich im Produkt mit dem zeitabhängigen Phasenfaktor $e^{-iEt/\hbar}$ als auslaufende Kugelwelle (Flächen konstanter Phase bewegen sich weg vom Streuzentrum), und kann daher mit der eigentlichen Streuung assoziiert werden.² Die physikalische Bedeutung der Streuamplitude ergibt sich aus der Analyse der Wirkstromdichte, $\vec{j} = \frac{1}{m}\Re\left[\psi^*\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi\right]$ im Limes $r \rightarrow \infty$. Der Beitrag der auslaufenden Kugelwelle $\psi = f\frac{e^{ikr}}{r}$ berechnet sich zu

$$\vec{j}^{\text{out}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\hbar k}{m} \frac{|f|^2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.10)$$

also radial nach außen.

Ein Detektor im Abstand r vom Streuzentrum registriert gestreute Teilchen mit einer Zählrate

$$\frac{dn}{dt} = j^{\text{out}} r^2 d\Omega \quad (2.11)$$

worin Ω der Raumwinkel, und $r^2 d\Omega$ die effektive Detektorfläche. Für einen verdünnten Teilchenstrahl ist die Zählrate proportional der Wirkstromdichte der einfallenden Teilchen

$$\frac{dn}{dt} = j^{\text{in}} d\sigma, \quad (2.12)$$

worin der *differentielle Streuquerschnitt* $d\sigma$ angibt, wieviele Teilchen aus dem einfallenden Strahl in den Detektor abgelenkt werden. Werden die einfallenden Teilchen

²Kugelwellen haben ein Problem bei $r = 0$, aber (2.8) soll ψ ja nur asymptotisch beschreiben (in Regionen $r \gg$ Reichweite von \hat{V}), und dort gilt eben $\hat{H}_0 e^{ikr}/r = E e^{ikr}/r$.

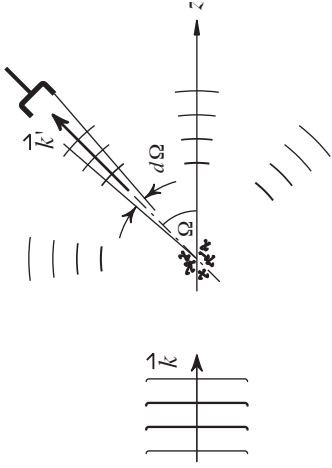


Abb 2.1 Geometrie eines typischen Streuversuchs.

durch eine ebenen Welle beschrieben, $\phi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, ist $j^{\text{in}} = \hbar k/m$ und infolgedessen

$$d\sigma = |f(\vec{k}', \vec{k})|^2 d\Omega \quad (2.13)$$

worin \vec{k} Wellenvektor der einfallenden Teilchen und \vec{k}' ein effektiver Wellenvektor der in Detektorrichtung gestreuten Teilchen,

$$\vec{k}' = k\vec{x}/r. \quad (2.14)$$

Wegen Energieerhaltung ist \vec{k}' vom Betrag $|\vec{k}'| = k$, vgl. (2.9), und zeigt vom Streuzentrum zum Beobachtungspunkt. In Kugelkoordinaten $f = f(\vartheta, \varphi)$ wo ϑ , φ der Azimuth- und Polarwinkel von \vec{k}' relativ zu \vec{k} . Bei der Streuung am Zentralpotential entfällt wegen Zylindersymmetrie bzgl. der Einfallrichtung \vec{k}/k die φ -Abhängigkeit. In diesem Fall $f = f(\vartheta)$.

Nachdem die physikalische Bedeutung der einzelnen Beiträge im asymptotischen Verhaltens geklärt ist verbleibt als das Hauptproblem der Streutheorie die Gleichung (2.7) unter der Randbedingung (2.8) zu lösen, und so die Streuamplitude f zu berechnen.

2.2 Lippmann-Schwinger-Gleichung

Motiviert durch die Erfolge der Störungstheorie fassen wir das Potential als “Störung” auf – die freie Gleichung haben wir ja schon gelöst. Einfaches Umstellen von (2.7) liefert $[E - \hat{H}_0] |\psi\rangle = \hat{V} |\psi\rangle$, zunächst wäre man also versucht zu schreiben $|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V} |\psi\rangle$ worin $|\phi\rangle$ der freien Gleichung genügt, $\hat{H}_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle$. Problem ist nun, dass die Energie E für Streuung – definitionsgemäß Punkt im kontinuierlichen Spektrum von \hat{H} – im Spektrum von \hat{H}_0 , der Operator $E\hat{1} - \hat{H}_0$ also nicht ohne

weiteres invertierbar. Um hier weiterzukommen betrachtet man zunächst komplexe Energien, $E \rightarrow E \pm i\epsilon$, wobei am Ende der Rechnung $\epsilon \rightarrow 0_+$. Die entsprechenden Lösungen der stationären Schrödingergleichung (2.7), bezeichnet $\psi^{(+)}$ bzw $\psi^{(-)}$, genügen

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} \hat{V} |\psi^{(\pm)}\rangle \quad \text{wobei } \hat{H}_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (2.15)$$

sog. *Lippmann-Schwinger Gleichung*.

Die rechte Seite involviert die Green'schen Operatoren der freien Schrödingergleichung³

$$\hat{G}_0^{(\pm)} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[E \pm i\epsilon - \hat{H}_0 \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

In den Übungen berechnen Sie die Matrixelemente von $\hat{G}_0^{(\pm)}$ in der Ortsdarstellung

$$G_0^{(\pm)}(\vec{x}, \vec{x}') := \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left\langle \vec{x} \left| \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} \right| \vec{x}' \right\rangle = - \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right] \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.17)$$

worin k die zur Energie E korrespondierende Wellenzahl, vgl. Gl. (2.9). Die Funktionen $G_0^{(\pm)}(\vec{x}, \vec{x}')$ genügen der inhomogenen freien Schrödingergleichung,

$$\left[E + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right] G_0^{(\pm)}(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.18)$$

die Ihnen schon aus der Elektrodynamik vertraut sind, Stichwort Greensche Funktionen der Helmholtzgleichung.

³Die Resolvente eines Operators \hat{A} ist erklärt $\hat{R}(z) := [z - \hat{A}]^{-1}$. Die Resolvente des Hamiltonoperator \hat{H} heißt *Greenscher Operator*, üblicherweise bezeichnet $\hat{G}(z) = [z - \hat{H}]^{-1}$.

In Ortsdarstellung nimmt die Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.15) die Form einer *Integralgleichung* an,

$$\psi^{(\pm)}(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) - \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right] \int d^3x' \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}') \psi^{(\pm)}(\vec{x}'). \quad (2.19)$$

Von besonderer Bedeutung hier die Lösung $\psi^{(+)}$, illustriert sie doch auf Schönste das Huygen'sche Prinzip: Wellen, die den Beobachtungspunkt \vec{x} aufgrund der Streuung an V erreichen sind Überlagerungen (das Integral) auslaufender Kugelwellen $\propto e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}/|\vec{x}-\vec{x}'|$ mit Zentrum bei \vec{x}' und Quellstärke $V(\vec{x}')\psi^{(+)}(\vec{x}')$.

Um der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung zu genügen muss hier gefordert werden⁴

$$\phi(\vec{x}) \equiv \phi_{\vec{k}}(\vec{x}) := e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.21)$$

Beachtet man nun für die Auswertung des Integrals in (2.19) für große $r := |\vec{x}| \gg r' := |\vec{x}'|$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \equiv \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'} = r - (\vec{x}/r) \cdot \vec{x}' + O(r'^2/r) \quad (2.22)$$

findet man im Limes $r \rightarrow \infty$ (bzw $r \gg$ Reichweite des Potentials) das in (2.8)

⁴Mit der speziellen Wahl einer einlaufenden ebenen Welle (2.21) erhält man eine Lösung der LSG (2.19), mit Normierung (vgl. Landau-Lifshitz III (was sonst) – Kap. 136)

$$\langle \psi_{\vec{k}}^{(+)} | \psi_{\vec{k}'}^{(+)} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.20)$$

geforderte asymptotische Verhalten mit einer Streuamplitude⁵

$$\begin{aligned} f(\vec{k}', \vec{k}) &= - \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right] \frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{x}') \\ &= - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \phi_{\vec{k}'} | \hat{V} | \psi_{\vec{k}}^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei das Subskript \vec{k} an $\psi^{(+)}$ daran erinnern soll, dass es sich um die Lösung der LSG (2.19) mit ϕ gemäß (2.21) handelt. Die Bra-Ket Formulierung in der letzten Gleichung erweist sich für die eher abstrakten Formulierungen der Streutheorie als nützlich.

Mit der Kenntnis der Streuamplitude wäre der differentielle Streuquerschnitt vollständig bestimmt. Allerdings bedarf die Berechnung der Streuamplitude der Lösung der LSG (2.19), und die kann – von einigen wenigen Fällen abgesehen – i.A. nicht in geschlossener Form angegeben werden. Ganz wie im diskreten Fall – Stichwort Störungstheorie – ist man daher auf Näherungsverfahren angewiesen.

Von prominenter Bedeutung dabei die Darstellung von $|\psi^{(+)}\rangle$ in Form einer Potenzreihe im Streupotential, genannt die *Born'sche Reihe*. Die Born'sche Reihe wird generiert, indem die rechte Seite der LSG (2.19) bzw. (2.15) wiederholt an Stelle

⁵Wird für $\phi(\vec{x})$ statt der ebenen Welle $e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ irgendeine andere homogene Lösung der freien Schrödingergleichung gewählt, ist asymptotisch $\psi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + f \frac{e^{ikr}}{r}$ mit f wie in () angegeben, aber der Zusammenhang von f mit dem differentielle Streuquerschnitt muss dann gegebenenfalls reformuliert werden, da die Stromdichte der einfallenden Teilchen nur für $\phi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ durch den schlichten Ausdruck $\vec{j} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}$ gegeben ist.

von $|\psi^{(+)}\rangle$ eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} |\psi_{\vec{k}}^{(+)}\rangle &= |\phi_{\vec{k}}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\psi_{\vec{k}}^{(+)}\rangle \\ &= |\phi_{\vec{k}}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}\left(|\phi_{\vec{k}}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\psi_{\vec{k}}^{(+)}\rangle\right) \\ &= |\phi_{\vec{k}}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\phi_{\vec{k}}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\phi_{\vec{k}}\rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Eingesetzt in Gl. (2.23) erhält man so die Born'sche Reihe für die Streuamplitude

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\phi_{\vec{k}'}|\hat{V}|\phi_{\vec{k}}\rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\phi_{\vec{k}'}|\hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{V}|\phi_{\vec{k}}\rangle + \dots \quad (2.25)$$

Begnügt man sich hier mit der führenden Ordnung schaut man auf die *Born'sche Näherung*. In Ortsdarstellung

$$f^{\text{Born}}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \underbrace{\int d^3x e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} V(\vec{x})}_{:=\tilde{V}(\vec{q})}, \quad (2.26)$$

also schlicht proportional der Fouriertransformierten des Potentials zum Argument

$$\vec{q} := \vec{k}' - \vec{k} \quad (2.27)$$

treffend bezeichnet *Impulsübertrag*.

Die Born'sche Näherung ist das Arbeitsfeld der Streutheorie. Für sphärisch symmetrisches Potentials $V = V(r)$ hängt f nur vom Betrag des Impulsübertrages $q := |\vec{q}|$ ab. Auswertung der x -Integration in Kugelkoordinaten ergibt

$$\tilde{V}(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr \quad (2.28)$$

und so

$$f^{\text{Born}}(\vartheta, \varphi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin(qr) dr, \quad (2.29)$$

wobei der Streuwinkel $\vartheta = \angle(\vec{k}', \vec{k})$ wegen $q^2 = \vec{k}'^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{k}' \cdot \vec{k} = 2k^2(1 - \cos\vartheta) = 4k^2 \sin^2 \vartheta/2$ Funktion von q , bzw.

$$q \equiv q(\vartheta) = 2k \sin(\vartheta/2). \quad (2.30)$$

Mit b die effektive Reichweite des Potentials ist $\tilde{V}(q)$ merklich verschieden von Null für Wellenzahlen $0 \leq q \lesssim 1/b$, angesichts (2.30) entsprechend Streuwinkeln $\sin(\vartheta/2) \lesssim (2kb)^{-1}$. Bei hohen Energien $kb \gg 1$ erfolgt die Streuung vorwiegend in Vorwärtsrichtung, und zwar in einen Raumwinkel der Größe $(kb)^{-1}$.

Der totale Streuquerschnitt, definiert $\sigma_{\text{tot}} := \int |f|^2 d\Omega$, angesichts $qdq = k^2 \sin \vartheta d\vartheta$ in Born'scher Näherung

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{Born}} = \frac{m^2}{2\pi\hbar^4 k^2} \int_0^{2k} \tilde{V}^2(q) q dq. \quad (2.31)$$

Der totale Streuquerschnitt geht für große Energien $\sim 1/E$ in die Knie.

Die LSG ist vom Typ Fredholmsche Integralgleichung. Konvergenz der Born'schen Reihe ist für diesen Typ nicht immer gegeben. Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Born'schen Reihe ist sicherlich die "Fouriertransformierbarkeit", insbesondere

$$V(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} \frac{1}{r^{2-\epsilon}}, \quad \epsilon > 0. \quad (2.32)$$

Für weitergehende Bedingungen, die insbesondere auch das Verhalten für große Abstände r berücksichtigen, sei auf die Spezialvorlesungen der Mathematischen Physik – Stichwort: asymptotische Methoden – verwiesen. Angesichts () ist aber offensichtlich, dass die Born'sche Näherung für hohe Energien gut, für niedrige Energien aber möglicherweise schlecht ist.

Die Reihendarstellung von $|\psi^{(+)}\rangle$, Gl. (2.24) läßt sich auch prägnant formulieren

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_0^{(+)}\hat{T}|\phi\rangle, \quad (2.33)$$

worin \hat{T} , die sog. *T-Matrix*, zunächst lediglich eine Abkürzung für die unendliche Reihe

$$\hat{T} := \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{V} + \dots \quad (2.34)$$

Die gleiche Darstellung wird aber auch generiert von einer Art Lippmann-Schwinger-Gleichung für \hat{T}

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0^{(+)}\hat{T} \quad (2.35)$$

wie man durch fortgesetztes Einsetzen der rechten Seite für \hat{T} bestätigt.

Vergleich der LSG (2.15) mit der formalen Lösung (2.33) offenbart

$$\hat{V}|\psi^{(+)}\rangle = \hat{T}|\phi\rangle. \quad (2.36)$$

und also kann die Streuamplitude mit der \hat{T} -Matrix ausgedrückt werden,

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle\phi_{\vec{k}'}|\hat{T}|\phi_{\vec{k}}\rangle \quad (2.37)$$

Das ist cool – kenne ich die T -Matrix, ist die Streuamplitude lediglich ein gewisses Matrixelement der T -Matrix. Die Darstellung der Streuamplitude bedarf allerdings nicht der vollen T -Matrix, sondern lediglich der T -Matrixelemente auf der Energieschale. Übrigens kennen Sie \hat{T} schon als Transfermatrix aus der QM-I, Stichwort eindimensionale Potentialstreuung ...

2.3 Partialwellenmethode

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung ist gut geeignet, wenn das Potential hinreichend schwach um die Born'sche Näherung zu rechtefertigen. Bei "starken" Potentialen –

denken Sie nur an die harte Kugel – bleibt die Lippmann-Schwinger-Gleichung zwar gültig, lässt sich aber nur schwer störungstheoretisch auswerten. Zum Einsatz in diesem Fall kommt in der Praxis ein andere Methode, bei der nicht nach Impulsen sortiert wird, sondern nach Drehimpulsen. Die Idee ist hier, dass nur Zustände mit niedrigen Drehimpulsen eine Rolle spielen – Zustände mit hohen Drehimpulsen werden durch die abstoßende Zentrifugalbarriere daran gehindert, bis zum Einzugsbereich des Potentials vorzudringen.

Kugelsymmetrie des Potentials legt die Verwendung von Kugelkoordinaten nahe. Die einfallende Ebene Welle mit Einfallrichtung in z -Richtung, ausgedrückt in Kugelkoordinaten $e^{ikz} = e^{ikr \cos \vartheta}$, lässt sich nach Legendrepolyomen entwickeln,

$$e^{ikz} = \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (2.38)$$

worin P_{ℓ} Legendrepolynom, und j_{ℓ} eine sphärische Besselfunktion erster Art von ℓ -ter Ordnung.

In die Darstellung (2.38) geht der Azimuthwinkel φ nicht ein. Im kugelsymmetrischen Potential kann dann auch die Streuamplitude nicht von φ abhängen, $f = f(\vartheta)$. Entwickelt nach Legendrepolyomen

$$f(\vartheta) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) f_{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta), \quad (2.39)$$

mit Entwicklungskoeffizienten f_{ℓ} , sog *Partialwellenamplituden*, die durch das Potential und die Energie bestimmt sind.

Separation von Winkel- und Radialkoordinaten in der stationären Schrödingergleichung gestattet die Darstellung der Streulösung

$$\psi = \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^{\ell} A_{\ell} R_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos \vartheta) \quad (2.40)$$

worin $R_\ell(r)$ Lösung der Radialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} R_\ell(r) + \left[k^2 - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R_\ell(r) = 0. \quad (2.41)$$

Als DGL zweiter Ordnung hat () zwei linear unabhängige Lösungen. Eine davon regulär $\rightarrow \text{const.}$ für $r \rightarrow 0$, die andere irregulär. Gebrauchte wird die reguläre Lösung. Für freie Teilchen $\hat{V} = 0$ ist die reguläre Lösung die *sphärische Besselfunktion* 1.-ter Art, j_ℓ , die irreguläre ist die sphärische Besselfunktion 2.-ter Art, auch genannt (sphärische) Neumannfunktion n_ℓ . Asymptotisch verhalten die beiden sich

$$j_\ell(kr) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{kr}, \quad n_\ell(kr) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\cos(kr - \ell\pi/2)}{kr}, \quad (2.42)$$

Für $\hat{V} \neq 0$ kann die reguläre Lösung – von wenigen Ausnahmen abgesehen – nicht in geschlossener Form angegeben werden. Hat das Potential allerdings endliche Reichweite, $V(r) = 0$ für $r > r_0$, ist das Teilchen für $r > r_0$ frei, in dieser Region die Lösung also eine Linearkombination von sphärischen Besselfunktionen der ersten und zweiten Art. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Koeffizienten der Linearkombination reell gewählt werden,⁶ genauer

$$R_\ell(r) = \cos \delta_\ell j_\ell(kr) - \sin \delta_\ell n_\ell(kr) \quad (2.43)$$

worin δ_ℓ reeller Parameter, sog *Streuphase*. Die Streuphasen sind von hervorragender Bedeutung – manifestiert sich in ihnen doch die gesamte Wechselwirkung mit dem Streupotential.

⁶Die gesuchte Funktion R_ℓ kann – bis auf eine komplexe Normierungskonstante (hier: A_ℓ) – reell gewählt werden: die DGL ist linear mit reellen Koeffizienten; mit R Lösung ist auch R^* Lösung, und also Real- und Imaginärteil. Durch die Regularitätsbedingung $R(r \rightarrow 0) = \text{const.}$ ist die Lösung bis auf einen Normierungsfaktor eindeutig festgelegt.

Hat das Potential zwar keine endliche Reichweite, fällt aber doch asymptotisch schnell genug gegen Null, gilt () asymptotisch, angesichts () also in jedem Fall

$$R_\ell(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(kr - \ell\pi/2 + \delta_\ell)}{kr} \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2ik} e^{i\delta_\ell} e^{ikr - i\ell\pi/2} - \frac{1}{2ik} e^{-i\delta_\ell} e^{-ikr + i\ell\pi/2} \quad (2.45)$$

Der Einfluss des Streupotentials macht sich offensichtlich nur in einer Phasenverschiebung relativ zum freien Fall bemerkbar.

Um den Zusammenhang mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt herzustellen, gilt es zunächst die Partialwellenamplituden f_ℓ und Koeffizienten A_ℓ durch die Streuphasen auszudrücken.

In Gl. (??) wurde die Asymptotik der Radialfunktion bereits in auslaufende und einlaufende Kugelwellen zerlegt. In der Sommerfeld-Asymptotik treten einlaufende Kugelwellen nur in der Zerlegung der einlaufenden ebenen Welle auf. Der Koeffizient A_ℓ in () liegt damit fest, $A_\ell = e^{i\delta_\ell}$. Vergleich des Anteils der auslaufenden Kugelwellen in () und () liefert dann

$$f_\ell = \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell}{k}. \quad (2.46)$$

Der Phasenfaktor $s_\ell := e^{2i\delta_\ell}$ entpuppt sich als Eigenwert der Streumatrix die im nächsten Kapitel eingeführt wird. Die S -Matrix ist unitär, entsprechend $|s_\ell| = 1$.

Die Streuamplitude, ausgedrückt durch die Streuphasen

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) P_\ell(\cos \vartheta). \quad (2.47)$$

Der totale Streuquerschnitt $\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \int_{-1}^{+1} |f(\vartheta)|^2 d(\cos\vartheta)$ berechnet sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der P_ℓ zu

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\ell} \sigma_{\ell} \quad \text{wobei} \quad \sigma_{\ell} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |\sin(\delta_{\ell})|^2 \quad (2.48)$$

Lies: der totale Streuquerschnitt σ_{tot} ist additiv in in den *partiellen Streuquerschnitten* σ_{ℓ} . Für $\ell = 0$ sog. *s-Wellenstreuung*, für $\ell = 1$ *p-Wellenstreuung* usw.

Ein scharfer Blick auf () und die Erinnerung an $P_\ell(1) = 1$ führt zu der Erkenntnis

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \Im[f(0)] \quad (2.49)$$

sog. *optisches Theorem*: der totale Streuquerschnitt ist im wesentlichen mit dem Imaginärteil der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung $\vartheta = 0$ gegeben.

Die partiellen Streuquerschnitte sind beschränkt,

$$\sigma_{\ell} \leq \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1), \quad (2.50)$$

Die rechte Seite definiert die sog. *Unitaritätsschranke* (engl. unitary bound): Unitarität der S-Matrix bedeutet reellwertige Streuphasen, daher $\sin^2 \delta_{\ell} \leq 1$, und also (). Sollten Ihre experimentellen Daten einmal die Unitaritätsschranke nicht respektieren sollten Sie besser ihr Experiment noch einmal wiederholen – oder schon mal den Sekt für den Nobelpreis kalt stellen: schließlich hätten Sie empirisch nachgewiesen, dass zwei plus zwei nicht immer gleich vier, sondern unter Umständen zwei plus zwei gleich fünf. Da das aber wenig wahrscheinlich ist, gehen Sie doch besser zurück an den Experimentierplatz ...

Die partiellen Streuquerschnitte gestatten eine einfache geometrische Interpretation. Die Unitaritätsschranke ist das Vierfache der Fläche eines Ringes mit Innenradius

$b_\ell = \ell/k$ und Außenradius $b_{\ell+1} = (\ell + 1)/k$, $\frac{4\pi}{k^2} = 4 \times \pi(b_{\ell+1}^2 - b_\ell^2)$. Die Radien b_ℓ können mit dem klassischen Stoßparameter identifiziert werden, die ein Teilchen mit Impuls $\hbar k$ haben muss, um einen Drehimpuls $\hbar \ell$ aufzuweisen.

Entsprechend kann der partielle Streuquerschnitt σ_ℓ gedeutet werden, dass der Bruchteil $\sin^2 \delta_\ell$ von Teilchen mit Stoßparameter $b_\ell \leq b \leq b_{\ell+1}$ durch das Potential abgelenkt werden. Ist der Stoßparameter größer als die Reichweite des Potentials, $b_\ell \gg r_0$, findet keine Streuung statt, und $\sigma_\ell \approx 0$ für $l \gg r_0 k$. Offensichtlich sind insbesondere bei niedrigen Energien nur die niedrigsten Partialwellen von Bedeutung. Von pathologischen Ausnahmen (Nullenergie-Resonanz etc, s.u.) abgesehen

$$\delta_\ell \stackrel{k \rightarrow 0}{\propto} k^{2\ell+1}. \tag{2.51}$$

Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ verbleibt insbesondere nur die s-Wellen Streuung,

$$\sigma_{\ell=0} \stackrel{k \rightarrow 0}{\sim} 4\pi a_0^2, \tag{2.52}$$

mit einer sog *Streulänge*

$$a_0 := - \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_0(k)/k = -f(k=0; \vartheta=0). \tag{2.53}$$

Die Streulänge ist für die Physik der ultrakalten Stöße von hervorragender Bedeutung. Positive Streulänge bedeutet effektive Abstoßung der Teilchen, negative Streulänge eine effektive Anziehung. Bose-Einstein Kondensate, beispielsweise, können nur mit Atomen realisiert werden für die die Streulänge positiv ist (Rubidium, Natrium, aber auch spinpolarisierter atomarer Wasserstoff).

Ist das Potential positiv fallend, $V'(r) \leq 0$, ist die Streulänge grundsätzlich positiv, entsprechend "Abstoßung" – ganz in Übereinstimmung mit der klassischen Intuition. Ist das Potential zwar anziehend, aber so schwach, dass es keinen gebunden Zustand ermöglicht, ist die Streulänge negativ. Auch das in Übereinstimmung mit

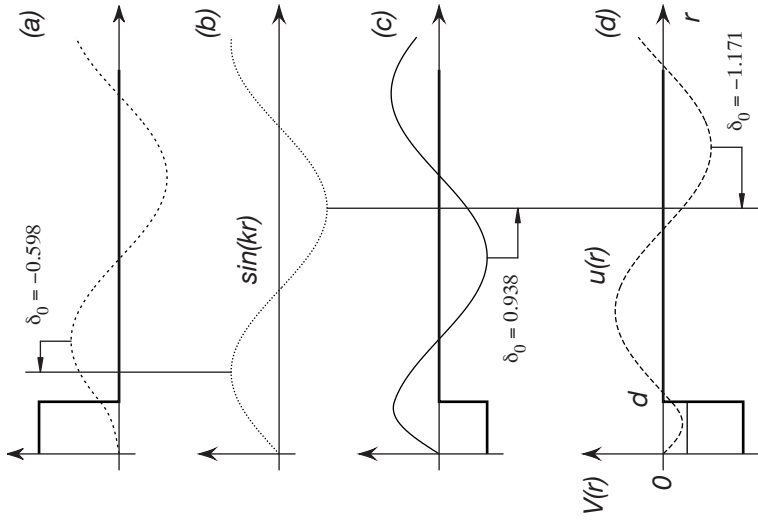


Abb 2.2 Wellenfunktionen der s-Wellenstreuung am Potentialberg (a) bzw Potentialschacht, (c) und (d).

der klassischen Intuition. Bei stärker anziehenden Potentialen, die auch Bindungszustände erlauben, kann die Streulänge aber durchaus positiv sein, entsprechend einem effektiv abstoßenden Potential.

Für exponentiell beschränkte Potentiale [8.264 in Galindo-Pascual]

$$k^{2\ell+1} \cot \delta_\ell(k) = -\frac{1}{a_\ell} + \frac{1}{2} r_\ell k^2 + O(k^4). \tag{2.54}$$

Die Streulänge sagt vermittelt ein Maß für die ... Die effektive Reichweite vermittelt ein Maß für die Energieskala ...

Als Funktion der k sind die Streuphasen mehrdeutige Funktionen. Gebrauchte werden sie nur mod π . Durch analytische Fortsetzung kann immer erreicht werden, dass $\delta_\ell(k)$ stetige Funktionen der Wellenzahl k über den gesamten Bereich $0 \leq k < \infty$. Eine genaue Untersuchung der Analytizitätseigenschaften der Funktionen δ_ℓ in der komplexen k -Ebene fördert dabei einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Zahl der gebundenen Zustände mit Drehimpuls ℓ , bezeichnet n_ℓ , und der Variation von $\delta_\ell(k)$ über der reellen k -Achse zutage,

$$\delta_\ell(0) - \delta_\ell(\infty) = \begin{cases} n_\ell \pi & \text{falls } \ell > 0 \text{ oder } \ell = 0 \text{ und } |a_0| < \infty \\ (n_0 + \frac{1}{2}) \pi & \text{falls } \ell = 0 \text{ und } |a_0| = \infty \end{cases} \tag{2.55}$$

genannt das *Levinson Theorem*.⁷ Das Levinson Theorem spielt eine wichtige Rolle für das *inverse Streuproblem* – die Rekonstruktion des Streupotentials aus den sog *Streudaten*

⁷Da die Fortsetzung immer so eingerichtet werden kann, dass im Hochenergieimes $\delta_\ell(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ alternativ

$$n_\ell = \frac{1}{2} \delta_\ell(0) - \frac{1}{2} \sin^2 \delta_\ell(0), \quad \ell = 0, 1, \dots \tag{2.56}$$

Der Faktor $\sin(\delta_\ell)^2$ im partiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)|\sin(\delta_\ell)|^2$ wird maximal, wenn

$$\delta_\ell = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \quad (2.57)$$

Die Energie für die dies geschieht definiert eine ℓ -Wellen Resonanz. Angesichts

$$e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell = \frac{1}{\cot \delta_\ell - i} \quad (2.58)$$

ist die Resonanzbedingung äquivalent $\cot \delta_\ell(E_R) = 0$. Für Energien in der Nähe der Resonanz kann $\cot(\delta_\ell(E))$ nach Taylor entwickelt werden,

$$\cot \delta_\ell(E) = -\frac{2}{\Gamma}(E - E_R) + \dots \quad (2.59)$$

und also

$$e^{i\delta_\ell(E)} \sin \delta_\ell(E) \approx -\frac{\frac{\Gamma}{2}}{E - E_R + i\frac{\Gamma}{2}} \quad (2.60)$$

Der partielle Streuquerschnitt

$$\sigma_\ell(E) \approx \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1) \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(E - E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (2.61)$$

sog *Breit-Wigner Wirkungsquerschnitt*, hat die Form eines Lorentzprofils mit Maximum bei $E \approx E_R$ und Breite $\approx \Gamma$.

2.4 Stoß identischer Teilchen

Wir betrachten den Stoß zweier Teilchen, der Einfachheit halber gleicher Masse m . Schwerpunkt und Relativkoordinaten sind dann definiert

$$\hat{R} = (\hat{r}_1 + \hat{r}_2)/2, \quad \hat{r} = \hat{r}_1 - \hat{r}_2. \quad (2.62)$$

Die kanonisch konjugierten Impulse lauten

$$\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{p}}_2, \quad \hat{\vec{p}} = (\hat{\vec{p}}_1 - \hat{\vec{p}}_2)/2. \quad (2.63)$$

Der Hamiltonoperator, ausgedrückt in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{4m} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{m} + V(\hat{\vec{r}}) \quad (2.64)$$

gestattet die Separation der Zweiteilchen-Wellenfunktion, $\Psi(\vec{X}, \vec{x}, t) = \phi(\vec{X}, t)\psi(\vec{x}, t)$, wobei $\phi(\vec{X}, t)$ der freien Schr'gl eines Quasiteilchens "Schwerpunkt" der Masse $2m$ genügt, und $\psi(\vec{x}, t)$ der Schrödingergleichung eines anderen Quasiteilchens "Relativteilchen" der Masse $m/2$ im äußeren Potential $V(\vec{x})$.

Bewegt sich das Relativteilchen im Schwerpunktsystem mit Energie k^2 in Richtung (ϑ, φ) , dann bewegt sich Teilchen 1 in die gleiche Richtung, Teilchen 2 aber in die entgegengesetzte Richtung $(\pi - \vartheta, \pi + \varphi)$. Die Streuamplitude von Teilchen 1 für eine Streuung in den Raumwinkel (ϑ, φ) ist daher $f(\vartheta, \varphi)$, die Streuamplitude von Teilchen 2 aber $f(\pi - \vartheta, \pi + \varphi)$. Die differentiellen Streuquerschnitte für Teilchen 1 und Teilchen 2 sind dann gegeben,

$$d\sigma^{(1)}(\vartheta, \varphi) = |f(\vartheta, \varphi)|^2, \quad d\sigma^{(2)}(\vartheta, \varphi) = |f(\pi - \vartheta, \pi + \varphi)|^2, \quad (2.65)$$

Der differentielle Streuquerschnitt für den Prozess "Streuung eines Teilchens", wobei kein Unterschied zwischen Teilchen 1 und Teilchen 2 gemacht wird, ist dann einfach die Summe ("Oder-W'keit")

$$d\sigma(\vartheta, \varphi) = d\sigma^{(1)}(\vartheta, \varphi) + d\sigma^{(2)}(\vartheta, \varphi), \quad (2.66)$$

und der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d\sigma(\Omega) \quad (2.67)$$

wobei der Faktor $1/2$ gemäß der üblichen Definition “Streuquerschnitt ist Zahl der aus dem einfallenden Strahl pro Zeit- und Stromeinheit ausgesonderten Teilchen”. Sind die Streupartner nicht nur gleichartig, sondern darüberhinaus identisch, ist notwendig

$$\psi_{\text{id}}(-\vec{x}, t) = \pm \psi(\vec{x}, t) \quad (2.68)$$

Offensichtlich $\psi_{\text{id}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(\vec{x}) + \psi(\vec{x}))$. Die Asymptotik

$$\psi_{\text{id}} \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \pm e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (f(\vartheta, \varphi) \pm f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.69)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist nun

$$d\sigma_{\text{id}} = \frac{1}{2} |f(\vartheta, \varphi) \pm f(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)|^2 . \quad (2.70)$$

Im Grenzfall niedrigster Streuenergie ist die Streuamplitude f isotrop, und die Streuung identischer Fermionen erscheint unterdrückt, während der Streuquerschnitt identischer Bosonen doppelt so groß wie der Streuquerschnitt unterscheidbarer Boltzonen.