Kapitel 9

Kanonische Quantisierung

Quantisierung via "Hüte auf Observable (hier: Felder ϕ und π)" sowie Kommutatorrelation

$$\{\cdot,\cdot\} \rightarrow \frac{i}{\hbar}\,[\cdot,\cdot] \tag{9.1}$$

sog *kannoische Quantisierung*. Insbesondere

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{y},t)\right] = i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{9.2}$$

worin $\hat{\phi},\hat{\pi}$ nun (Feld)Operatoren.

Sie überzeugen sich davon, dass Produkte $\phi\pi$ bzw. $\pi\phi$ in der Tat die Dimension einer Wirkungsdichte aufweisen[1].

[1] Zur Erinnerung: die Delta-Funktion hat die Dimension einer räumlichen Dichte, denn $\int \delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3x = 1$, und $\hbar$ hat die Dimension einer Wirkung, also ist $\hbar\delta^(\vec{x}-\vec{y})$ von Dimension Wirkungsdichte. Andererseits ist $\vec{\nabla}\phi$ von Dimension "WurzelAusEnergiedichte", Dimension von ϕ daher

Mit Blick auf () und Ersetzung () liefert die Erkenntnis: Bewegungsgleichungen der klassischen Theorie – also die Feldgleichung – sind Heisenbergsche Bewegungsgleichungen der quantisierten Theorie. Die Klein-Gordon Gleichung ist also nicht die Schrödingergleichung einer relativistischen Wellenmechanik, sondern die Heisenbergsche Bewegungsgleichung eines Quantenfeldes $\hat{\phi}$.

Translationsinvarianz legt Entwicklung nach ebenen Wellen $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ nahe (Volumen V, periodische Randbedingungen),

$$\hat{\phi}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \tilde{\phi}(\vec{k},t)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}} \tag{9.3}$$

mit $\tilde{\phi}^*(\vec{k},t) = \tilde{\phi}(-\vec{k},t)$ wegen ϕ reell. Entwicklungskoeffizienten genügen

$$\ddot{\tilde{\phi}}(\vec{k},t) + \omega_k^2\tilde{\phi}(\vec{k},t) = 0 \tag{9.4}$$

worin

$$\omega_k = c\sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} \tag{9.5}$$

Reellität (Selbstadjungiertheit) in Entwicklung nach ebenen Wellen “direkt” berücksichtigen,

$$\hat{\phi} = c\sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] \tag{9.6}$$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{c}\sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V}}(-i) \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}_{\vec{k}} - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] \tag{9.7}$$

“Länge-mal-WurzelAusEnergiedichte”, Dimension von π ist “Zeit-mal-WurzelAusEnergiedichte-durch-Länge”, somit Dimenion von $\pi\phi$ (oder $\phi\pi$) gleich Zeit-mal-Energiedichte = Wirkungsdichte. Uff ...

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \int \left[\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}\phi + ic\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}}\pi \right] \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{V}} d^3x \tag{9.8}$$

Kommutatoralgebra der $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ durch kanonischen Kommutator bestimmt,

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] &= \ldots && (9.9) \\ &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} && (9.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] , && (9.11) \\ \hat{\vec{P}} &= \hbar\vec{k}\frac{1}{2}\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right] . && (9.12) \end{aligned}$$

Nullpunktsbeiträge, Casimireffekt.

Kontinuumlimes $V \to \infty$, beachte $k = \frac{2\pi}{(V)^{\frac{1}{3}}}n$, $n00, \pm1, \ldots$,

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \tag{9.13}$$

$$\hat{a}_{\vec{k}} \to \hat{a}(\vec{k}) := \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}\hat{a}_{\vec{k}} , \tag{9.14}$$

$$\hat{\phi} = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k}) + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger(\vec{k})\right] \tag{9.15}$$

$$\hat{\pi} = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3}\sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2c^2}}(-i)\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k}) - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger(\vec{k})\right] \tag{9.16}$$

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\,. \tag{9.17}$$

$$\hat{\phi}(\vec{x},t)|0\rangle = \int d^3k \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}|\hat{\vec{k}}\rangle \tag{9.18}$$

$$|\vec{x}\rangle = \int d^3k |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle \propto \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}|\vec{k}\rangle \tag{9.19}$$

Daher: Im Vakuum erzeugt $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ Teilchen bei $\vec{x}$. Auch

$$\langle 0|\hat{\phi}(\vec{x})|\vec{k}\rangle = \ldots \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \langle\vec{x}|\vec{k}\rangle\,. \tag{9.20}$$

9.1 Mikrokausalität

Kanonische Kommutatoren sind *Gleichzeitkommutatoren*; jetzt: Kommutatoren zu unterschiedlichen Zeiten. Setze $x = (ct, \vec{x})$, $y = (ct', \vec{x}')$; betrachte

$$D(x,y) := [\phi(x), \phi(y)] \tag{9.21}$$

Für raumartigen Abstand $(x-y)^2 < 0$ (Minkowskimetrik!) sind Ereignisse x und y durch keinen physikalischen Prozess verknüpfbar, daher sollte sich in diesem Fall ergeben $D(x,y) = 0$ (quantenmechanisch: $\phi(x)$ und $\phi(y)$ sind gemeinsam messbar). Für zeitartigen Abstand $(x-y)^2 > 0$ wird hingegen erwartet $D(x,y) \neq 0$.

`[Weiter in Übung ...]`

9.2 Ergänzung: Feldtheorie der Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung eines Punktteilchens, daran sei erinnert, lautet in Ortsdarstellung

$$\imath\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t) + V(\vec{x})\psi(\vec{x},t) \tag{9.22}$$

Hier soll die Schrödingergleichung als Euler-Lagrange Gleichung einer klassischen Feldtheorie rekonstruiert werden.

Ohne Schwierigkeiten Überzeugt man sich, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*)\cdot(\vec{\nabla}\psi) - V(\vec{x})\psi^*\psi \tag{9.23}$$

zum erhofften Erfolg führt.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\psi \tag{9.24}$$

`[Weiter in Übung ...]`