Kapitel 12

Dirac Quantisiert

Ausgangspunkt ist der Dirac-Hamiltonian

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}) \left[mc^2\beta + \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} \right] \hat{\Psi}(\vec{x}) \tag{12.1}$$

Im folgenden bezeichnet $\nu = (E, \vec{k}, \sigma)$ einen Satz von Quantenzahlen der Teilchen positiver Energie, und $\bar{\nu} = (-E, -\vec{k}, -\sigma)$ einen entsprechenden Satz für Teilchen negativer Energie. Die Energie ist dabei nicht unabhängig, $E = \sqrt{(\hbar\vec{k})^2c^2 + m^2c^4}$.

Die Dirac Wellenfunktion (Operator) wird nach der Orthonormalbasis entwickelt,

$$\hat{\Psi} = \sum_\nu \hat{c}_\nu u_\nu(\vec{x}) + \hat{c}_{\bar{\nu}} v_{\bar{\nu}}(\vec{x}) \tag{12.2}$$

worin $\hat{c}$ Vernichtungsoperatoren.

Gemäß Löchertheorie ist die Vernichtung eines $(-E, -\vec{k}, -\sigma)$ gleichbedeutend einer Erzeugung eines Lochs (=Positron) mit Quantenzahlen $(E, \vec{k}, \sigma)$. Daher

$$\hat{c}_{\bar{\nu}} = \hat{b}_{\nu}^{\dagger}\,, \qquad \hat{c}_{\bar{\nu}}^{\dagger} = \hat{b}_{\nu}\,. \tag{12.3}$$

In Elektron-Positron Sprache

$$\hat{\Psi} = \sum_{\nu} \hat{c}_{\nu} u_{\nu}(\vec{x}) + \hat{b}_{\nu}^{\dagger} v_{\bar{\nu}}(\vec{x}) \tag{12.4}$$

$$\hat{\Psi}^{\dagger} = \sum_{\nu} \hat{c}_{\nu}^{\dagger} u_{\nu}^{*}(\vec{x}) + \hat{b}_{\nu} v_{\bar{\nu}}^{*}(\vec{x}) \tag{12.5}$$

Einsetzen in (), Ausführen der x-Integration, dabei beachten dass die u und v orthonormal führt auf

$$\hat{H} = \sum_{\nu} E_{\nu} \hat{c}_{\nu}^{\dagger} \hat{c}_{\nu} + (-E_{\nu}) \hat{b}_{\nu} \hat{b}_{\nu}^{\dagger} \tag{12.6}$$

Quantisierung mit Kommutatoren würde hier zu einem "negativen Energie-Desaster" führen.

Statt dessen, in Übereinstimmung mit Pauli-Verbot, Quantisierunge mittels Antikommutatoren,

$$\left\{\hat{c}_{\nu}, \hat{c}_{\mu}^{\dagger}\right\} = \delta_{\mu\nu}\,, \qquad \left\{\hat{b}_{\nu}, \hat{b}_{\mu}^{\dagger}\right\} = \delta_{\mu\nu}\,, \tag{12.7}$$

und alle anderen Antikommutatoren gleich Null. übertragen auf Feldoperatoren

$$\left\{\hat{\Psi}_{a}(\vec{x}), \hat{\Psi}_{a'}(\vec{x}')\right\} = \left\{\hat{\Psi}_{a}^{\dagger}(\vec{x}), \hat{\Psi}_{a'}^{\dagger}(\vec{x}')\right\} = 0\,, \tag{12.8}$$

$$\left\{\hat{\Psi}_{a}(\vec{x}), \hat{\Psi}_{a'}(\vec{x}')\right\} = \delta_{aa'} \delta(\vec{x} - \vec{x}')\,. \tag{12.9}$$

Hamilton

$$\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sum E \hat{c}^\dagger \hat{c} + \sum E \hat{b}^\dagger \hat{b} \tag{12.10}$$

Ladung $\propto \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} d^3x$

$$\hat{Q} = \sum \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \tag{12.11}$$