Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2013/14
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 3 — Ausgabe: 05. November 2013
Abgabe: 19. November 2013

Problem 3.1 – Quantenzustände eines Zwei-Niveau-Systems (8 points)

In der Vorlesung haben wir die Bloch-Kugel kennengelernt. Sie liefert eine intuitive Vorstellung der Quantenzustände eines Zwei-Niveau-Systems, dargestellt durch die Zerlegung der Dichtematrix:

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{1} + \sum_i s_i \sigma_i\Big) \tag{3.1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Komponenten des Bloch-Vektors s_i ($i = 1, 2, 3$) die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen sind:

$$s_i = \langle \sigma_i \rangle = \mathrm{tr}(\sigma_i \rho) \tag{3.2}$$

Hinweis. Bekannt ist die fundamentale Beziehung der Pauli-Matrizen:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + \mathrm{i} \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k \tag{3.3}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die (Un)Reinheit $\mathrm{Pu}(\rho) = 1 - \mathrm{tr}\, \rho^2$ des Zustands gegeben ist durch

$$\mathrm{Pu}(\rho) = \frac{1 - \mathbf{s}^2}{2}, \qquad \mathbf{s}^2 = \sum_i s_i^2 \tag{3.4}$$

Beschreiben Sie geometrisch die Klasse der Zustände, die dieselbe Reinheit besitzen.

(iii) Seien $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ zwei (reine) Zustandsvektoren für das Zwei-Niveau-System mit den Bloch-Vektoren $\{r_i\}$ und $\{s_i\}$. Zeigen Sie, dass für das komplexe Skalarprodukt gilt

$$|\langle \psi | \chi \rangle|^2 = \frac{1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{2}, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \sum_i r_i s_i \tag{3.5}$$

und beschreiben Sie dieses Ergebnis geometrisch.

Hinweis. Stellen Sie den Projektor $|\psi\rangle\langle\psi|$ über den Blochvektor $\{r_i\}$ dar und gehen Sie wie in (ii) vor.

(iv) Sei $H = \sum_i B_i \sigma_i$ ein Hamilton-Operator für das Zwei-Niveau-System. Was können Sie über die Objekte B_i sagen? Betrachten Sie den Einheitsvektor $b_i = B_i / (\mathbf{B}^2)^{1/2}$ und die Dichteoperatoren

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{1} \pm \sum_i s_i \sigma_i\Big) \tag{3.6}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen die Interpretation haben: "P_+ ist der Projektor auf einen Eigenzustand von H."

$$P_+^2 = P_+, \qquad H P_+ = E_+ P_+ \tag{3.7}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $E_{\pm}$. Geben Sie geometrisch an, welche Bloch-Vektoren die Eigenzustände von H haben.

Problem 3.2 – Freie Zeitentwicklung des Zwei-Niveau-Systems (6 points)

Sei $H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A \sigma_3$ der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems.

(i) Welche Dimension und Bedeutung hat die Größe ω_A?

(ii) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $\sigma_{1,2}$ im Heisenberg-Bild ab (Vorzeichen ϵ noch zu finden)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} = \epsilon\omega_A \sigma_2, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}t} = -\epsilon\omega_A \sigma_1 \tag{3.8}$$

Nehmen Sie die Erwartungswerte dieser Gleichungen und überlegen Sie, dass ihre Lösungen Kreisbewegungen in der $s_1 s_2$-Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω_A um die s_3-Achse sind.

(iii) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für diesen Hamilton-Operator und berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\psi(t)|\sigma_1|\psi(t)\rangle$ und $\langle\psi(t)|\sigma_2|\psi(t)\rangle$.

Problem 3.3 – Dipol-Operator (6 points)

Die Operatoren σ_1 und σ_2 hängen mit dem elektrischen Dipolmoment des Zwei-Niveau-Systems zusammen.

(i) Betrachten Sie ein Atom oder kleines Molekül mit einem "aktiven Elektron" (Position $\mathbf{r}$) und überlegen Sie, dass $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ das elektrische Dipolmoment ist.

(ii) Machen Sie eine Abschätzung, wie groß für "typische" Zustände mit Quantenzahlen q und q' die Matrixelemente $\langle q|\mathbf{d}|q'\rangle$ sind.

(iii) Experimentalphysiker A behauptet: "Das Molekül HCl hat ein elektrisches Dipolmoment im Grundzustand." Theoretiker B widerspricht: "Im Grundzustand ist der Erwartungswert des Dipolmoments Null." Versetzen Sie sich in beide Positionen hinein und erläutern Sie ihre Gründe. Warum haben beide Recht?