Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2013/14
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4 Ausgabe: 11./18. November 2013
Abgabe: 03. Dezember 2013

Problem 4.1 – Drehungen und unitäre Abbildungen* (6* points)

Seien σ_i die bekannten Pauli-Matrizen. Betrachten Sie folgende lineare Abbildung vom Vektorraum $\mathbb{R}^3$ in einen Unterraum $\mathcal{A}$ der komplexen 2×2-Matrizen

$$\Upsilon : \mathbf{r} \mapsto S = \sum_{i=1}^{3} r_i \sigma_i \tag{4.1}$$

(i) Was können Sie über diesen Unterraum sagen?

(ii) Überlegen Sie, dass auf diesem Unterraum wie folgt ein nicht-entartetes Skalarprodukt definiert wird:

$$(S, T) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(S^\dagger T) \tag{4.2}$$

Und: bezüglich der Norm, die von diesem Skalarprodukt erzeugt wird, sind die Pauli-Matrizen auf 1 normiert. Finden Sie mit diesem Hinweis die Umkehrabbildung $\Upsilon^{-1} : S \mapsto \mathbf{r}$.

(iii) Sei U eine unitäre Matrix (zur Erinnerung: $U^\dagger = U^{-1}$). Überlegen Sie, dass die Konjugation mit U den Unterraum $\mathcal{A}$ invariant lässt. (Das heißt: …?) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt in $\mathcal{A}$ unter Konjugation erhalten bleibt:

$$(U^\dagger S U, U^\dagger T U) = (S, T) \tag{4.3}$$

(iv) Folgern Sie, dass die Abbildungskette

$$\mathbf{r} \mapsto \Upsilon(\mathbf{r}) \mapsto U^\dagger \Upsilon(\mathbf{r}) U \mapsto \mathbf{r}' = \Upsilon^{-1}(U^\dagger \Upsilon(\mathbf{r}) U) \tag{4.4}$$

eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert, die Längen und Winkel zwischen Vektoren erhält. Es muss also eine Drehung sein. Beobachten Sie, dass die Matrizen U und $-U$ dieselbe Drehung erzeugen.

(v) Der Hamilton-Operator $H = \sum_i h_i \sigma_1$ ist ein Element von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-\mathrm{i}Ht/\hbar)$ im $\mathbb{R}^3$ einer Drehung um die Achse $\mathbf{h}$ mit einem Drehwinkel proportional zu t entspricht.

Problem 4.2 – Rotating frame and 'resonance approximation' (10 points)

We have seen in the lecture that a two-level system driven by a (classical) laser field is described by the following Hamiltonian

$$H_{\rm AL}(t) = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3 + \frac{\hbar}{2}(\Omega\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega_L t} + {\rm c.c.})\sigma_1 \tag{4.5}$$

where Ω is the Rabi frequency. The time-dependence of this Hamiltonian makes the solution of the Schrödinger equation complicated. One often uses a unitary transformation into the so-called 'rotating frame':

$$|\psi(t)\rangle = S(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle, \qquad S(t) = \exp(-{\rm i}\omega_L t\sigma_3/2) \tag{4.6}$$

Show that the state vector $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ solves a time-dependent Schrödinger equation with the Hamiltonian

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rm AL}(t) &= -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_3 + \frac{\hbar}{2}(\Omega\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega_L t} + {\rm c.c.})(\sigma\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega_L t} + \sigma^\dagger\,{\rm e}^{-{\rm i}\omega_L t}) & (4.7) \\ \Delta &= \omega_L - \omega_A \qquad \text{'detuning'} & (4.8) \end{aligned}$$

where σ and $\sigma^\dagger$ with $\sigma_1 = \sigma + \sigma^\dagger$ are the two-level annihilation and creation operators. Average the Hamiltonian over one period of the laser field, $\tilde{H}_{\rm AL}(t) \mapsto \overline{H}_{\rm AL}$, and show that only the interaction terms in the 'resonance approximation' remain:

$$\overline{H}_{\rm AL} = -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_3 + \frac{\hbar}{2}(\Omega\,\sigma^\dagger + \Omega^*\,\sigma) \tag{4.9}$$

Show that the eigenvalues of this Hamiltonian are $\pm\hbar(\Delta^2 + |\Omega|^2)^{1/2}$.

Problem 4.3 – Fast and slow evolution (10 points)

In the preceding exercise, you have derived the Hamiltonian for the driven two-level system in the so-called rotating wave approximation (better called: resonance approximation). In this problem, you are invited to check numerically how well this approximation works.

(i) Look up numbers for ω_A, Δ, and Ω and choose a suitable unit of time to solve the time-dependent Schrödinger equation numerically:

$${\rm i}\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = H_{\rm AL}(t)|\psi(t)\rangle \tag{4.10}$$

given the initial condition $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$.

(ii) Try to write a program (*Mathematica, Matlab, Fortran, C, Python* or whatever) which solves the time-dependent Schrödinger equation numerically. Why is this a challenge when you take the realistic values $|\Omega| \sim 10^{-8}\,\omega_A$?

(iii) Show that the amplitudes $c_a(t)$ and $\tilde{c}_a(t)$ ($a = e, g$) calculated from the states $|\psi(t)\rangle$ and $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ (as defined in Eq.(4.6)) give the same populations $p_a(t) = |c_a(t)|^2 = |\tilde{c}_a(t)|^2$. Write down the equations of motion for $c_a(t) = \langle a|\psi(t)\rangle$ and $\tilde{c}_a(t)$, using for $\tilde{c}_a(t)$ the approximate Hamiltonian $\overline{H}_{\rm AL}$.

(iv) Solve the two equations of motion numerically for the unrealistic parameter choice $|\Omega| = \Delta \sim 10^{-2}\,\omega_A$ and display the solutions for $p_e(t)$ in a single plot as a function of the dimensionless time variable $|\Omega|t$. Check that the total probability is constant in time. Comment on the difference between the solutions when ω_A becomes larger.

[Bonus points] Plot also the components $s_1(t)$ and $s_2(t)$ of the Bloch vector and compare the results of the two Hamiltonians.

For the Hamiltonian in resonance approximation, $\overline{H}_{\rm AL}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\tilde{c}_{\rm e}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\Delta}{2}\tilde{c}_{\rm e} + \frac{\Omega}{2}\tilde{c}_{\rm g} \\
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\tilde{c}_{\rm g}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\Delta}{2}\tilde{c}_{\rm g} + \frac{\Omega^*}{2}\tilde{c}_{\rm e}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$