Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2015/2016) -

Übungsblatt 3

Ausgabe 24.11.15 – Abgabe 03.12.15– Besprechung 04.12.15

▷ Aufgabe 1 (Eine Pico-Einführung in die Feldquantisierung)

Zunächst eine kleine Erinnerung an die klassische Elektrodynamik: In Raumbereichen wo sich keine Ladungen und Ströme befinden genügt das elektromagnetische Feld den Maxwellschen Gleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=c^{-2}\dot{\vec{E}}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, und die in einem Volumen V gespeicherte elektromagnetische Energie berechnet sich zu

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V\left[\vec{E}^2+c^2\vec{B}^2\right]d^3x\,. \tag{1}$$

(a) Bestätigen Sie: Für eine stehende elektromagnetische Welle, $\vec{E}(\vec{x},t)=E(t)\vec{e}_y\cos(kx)$, $\vec{B}(\vec{x},t)=B(t)\vec{e}_z\sin(kx)$ impliziert M'wll Bewegungsgleichungen für die Amplituden $\dot{E}=\omega cB$, $c\dot{B}=-\omega E$, wobei $\omega=ck$.

(b) Bestätigen Sie: Mit der Bezeichnung $Q:=cB/A$, $P:=E/A$, worin $A=\sqrt{2\omega/(\varepsilon_0 V)}$, lesen sich die Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q}=\omega P\,,\qquad \dot{P}=-\omega Q\,, \tag{2}$$

und es ist $U\equiv H(P,Q)$ mit

$$H(P,Q)=\frac{\omega}{2}\left(P^2+Q^2\right) \tag{3}$$

Hamiltonfunktion zu (2).

(c) Wagen Sie den Schritt zur Verallgemeinerung: Jeder Mode des Strahlungfeldes entspricht ein harmonischer Oszillator dessen Frequenz durch die Frequenz der Mode gegeben ist. Die Auslenkung Q entspricht der magnetischen Feldamplitude der jeweiligen Mode und der kanonisch konjugierte Impuls P entspricht ihrer elektrischen Feldamplitude.

(d) Quantisieren Sie nun das Feld der o.a. elektromagnetischen Welle – also: Hüte auf die Phasenraumfunktionen Q und P (damit aus Ihnen veritable Operatoren werden), und die Poissonklammern durch Kommutatoren ersetzen, genauer: $\{\cdot,\cdot\}\to\frac{1}{i\hbar}[\hat{\cdot},\hat{\cdot}]$. Was ergibt sich für den Kommutator der elektrischen und magnetischen Amplitude (in SI-Einheiten), und wie stellt sich die Heisenberg'sche Unschärferelation der beiden dar?

(e) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators der Mode. In der "Orstdarstellung" – welche physikalische Bedeutung hat die "Ortskoordinate"? Nach einer Fouriertransformation – welche physikalische Bedeutung hat die "Impulskoordinate"?