Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2015/2016) -

Übungsblatt 5

Ausgabe 05.01.16 – Abgabe 14.01.16– Besprechung 15.01.16

▷ Aufgabe 1

Gegeben eine Lagrangefunktion

$$L = \frac{i\hbar}{2}(z^*\dot{z} - z\dot{z}^*) - \tilde{f}(z, z^*) \tag{1}$$

worin z komplexe Variable und f reell.

(a) Man bestimme die Euler-Lagrangegleichung zu L. Man überzeuge sich, dass bei Vorgabe von $z(t_0)$ die Zeitentwicklung des Systems vollständig bestimmt ist, es daher redundante dynamische Variable in L gibt (d.h. die Variable $z, z*, \dot{z}, \dot{z}^*$ sind nicht unabhängig).

(b) Man bestimme die Funktion

$$H = \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \dot{z}^*\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} - L\,, \tag{2}$$

und überzeuge sich insbesondere

$$H = f(z, z^*)\,. \tag{3}$$

<u>Bemerkung:</u> *Wären* die Koordinaten und Geschwindigkeiten, also $z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*$ unabhängig, *wäre* H automatisch die Hamiltonfunktion des Systems. Nun sind die genannten Koordinaten zwar nicht unabhängig, aber H erweist sich dennoch als die "richtige" Hamiltonfunktion. Um das zu sehen, muss man leider ein bisschen rumfummeln. Was in den nächsten Aufgabenteilen geschieht ...

(c) Man setze $z = x + iy$ wo x, y reell, schreibe die Lagrangefunktion (1) in den Variablen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, und eliminiere die $\dot{y}$-Abhängigkeit durch Addition einer geeignet gewählten totalen Zeitableitung, $L'(x, \dot{x}, y) = L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \frac{d}{dt}u(x, y)$. Bestimmen Sie $u(x, y)$.

(d) Um anschließend auch noch die y-Abhängigkeit los zu werden, stelle man die Euler-Lagrange-Gleichungen zu L' für y auf, löse diese nach y auf, $y = y(x, \dot{x})$, setze die Lösung in L' ein, $L''(x, \dot{x}) = L'(x, \dot{x}, y(x, \dot{x}))$, überzeuge sich $\partial L''/\partial \dot{x} = \partial L'/\partial \dot{x}$, insbesondere

$$p \equiv \frac{\partial L''}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 2\hbar y \tag{4}$$

mit $y = y(x, \dot{x})$, bastele sich nach den üblichen Vorschriften die Hamiltonfunktion (hier nun genannt H''), und erfreue sich an (es ist $g(x, y) = f(z, z^*)$)

$$H'' = g(x, y) = g(x, p/(2\hbar))\,. \tag{5}$$

Um sich endgültige Gewissheit zu verschaffen, dass man sich nicht verrechnet hat, sollte man sicherheitshalber noch mal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu (5) aufstellen, und sich überzeugen, dass sie den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu L gleichen ...

(e) Die Quantisierung ist nun schnell erledigt: Hüte auf die Variablen, und den kanonischen Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ postulieren. Angesichts (4) impliziert der kanonische Kommutator $[\hat{x}, \hat{y}] = \frac{i}{2}$, und infolge dessen

$$[\hat{z}, \hat{z}^\dagger] = 1\,. \tag{6}$$

Ein flüchtiger Vergleich von (3) mit (5) genügt um zu erkennen: H und H'' sind gleich! Hätte man sich den ganzen Zirkus (c) und (d) also sparen können? Nicht ganz. Ein ebenso flüchtiger Blick lehrt nämlich auch, dass $\partial L/\partial z$ leider kein kanonisch konjugierter Impuls zu z, denn $\left[z, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right] = \frac{i\hbar}{2}$ (und nicht $i\hbar$ wie es sein sollte).

Bemerkung: Im Gegensatz zu den üblichen Lagrangefuntkionen der klassichen Mechanik ist die vorliegende Lagrangefunktion linear in den Geschwindigkeiten. Von solchem Typ ist auch die Lagrangefunktion der Schrödinger'schen Wellenmechanik und der Diractheorie. Charakteristisch ist dabei, dass nicht – wie hier naiverweise zu erwarten – vier unabhängige Variable vorliegen – etwa z und $\dot{z}$ – sondern nur zwei.

▷ **Aufgabe 2**

Ergänzt man die Klein-Gordon Gleichung um einen Quellterm $\lambda(\vec{x}, t)$ schaut man auf

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x) = \lambda\,, \tag{15}$$

treffend genannt die *inhomogene Klein-Gordon Gleichung*.

(a) Zeigen Sie, dass (15) eine Bilanzgleichung impliziert

$$c^{-1}\partial_t T^{00}_\lambda + \vec{\nabla}\cdot\vec{T}^0 = -(\dot{\lambda}\phi^* + \dot{\lambda}^*\phi) \tag{16}$$

mit $T^{00}_\lambda = T^{00} - (\lambda^*\phi + \lambda\phi^*)$, wobei $c^{-1}T^{00} = \left[\frac{1}{c^2}|\dot{\phi}|^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}|\phi|^2\right]$ und $\vec{T}^0 = -\left[\dot{\phi}^*\vec{\nabla}\phi + \dot{\phi}\vec{\nabla}\phi^*\right]$. Feldtheoretisch wird (16) als *Energiebilanz* interpretiert.

(b) Für stationäre Quellen $\partial_t\lambda = 0$ beweise man den Energiesatz

$$\frac{d}{dt}E_\lambda = 0\,,\ \text{wobei } E_\lambda = \int\left\{\frac{1}{c^2}|\dot{\phi}|^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}|\phi|^2 - (\lambda^*\phi + \lambda\phi^*)\right\}d^3x\,. \tag{17}$$

(c) Zeigen Sie, dass für eine am Ort $\vec{x}'$ plazierte Punktquelle, also $\lambda(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ die Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{-\kappa|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{18}$$

mit $\kappa = mc/\hbar$ die physikalisch akzeptable Lösung der zeitunabhängigen Klein-Gordon Gleichung $(-\Delta_x + \kappa^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$. Schließen Sie, dass somit

$$\phi(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}')\lambda(\vec{x}')d^3x' \tag{19}$$

die zeitunabhängige Lösung von (15) für beliebige zeitunabhängige Quelle λ, und somit

$$E_\lambda = -\iint \lambda(\vec{x})G(\vec{x},\vec{x}')\lambda(\vec{x}')d^3x d^3x' \,. \tag{20}$$

Für das reelle Quellfeld zweier Quellklumpen, der eine plaziert bei $\vec{a}$, der andere bei $\vec{b}$, $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ ist $E_\lambda = E_{aa} + E_{bb} + E_{ab}$, worin E_a und E_b die Selbstenergien der Klumpen a, b, und E_{ab} ihre Wechselwirkungsenergie,

$$E_{ab} = 2\iint \lambda_a(\vec{x})G(\vec{x},\vec{x}')\lambda_b(\vec{x}')d^3x d^3x' \,, \tag{21}$$

wobei hier von der Symmetrie $G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}',\vec{x})$ Gebrauch gemacht wurde.

(d) Zeigen Sie für den speziellen Fall, dass es sich um Punktquellen der Stärke g_a bzw g_b handelt,

$$E_{ab} = -2g_a g_b G(|\vec{a}-\vec{b}|) = -\frac{2g_a g_b}{4\pi}\frac{e^{-\kappa|\vec{a}-\vec{b}|}}{|\vec{a}-\vec{b}|} \,. \tag{22}$$

Offensichtlich können zwei Quellklumpen mit gleichnamiger "Ladung" ($g_a g_b > 0$) ihre Wechselwirkungenergie vermindern, wenn sie sich näher kommen! Yukawa hat so seinerzeit den Zusammenhalt von Neutron und Proton im Deuteron (einem gebundenen Zwei-Teilchen Zustand) durch Austausch von Mesonen (den durch ϕ beschriebenen Teilchen) erklärt. Ihm zu Ehren heißt (22) daher auch *Yukawapotential*.

Dass sich im Yukawa-Modell gleichnamige (starke) Ladungen anziehen, in der Elektrodynamik aber gleichnamige (elektrische) Ladungen abstoßen, findet seine tiefere Begründung im Spin s der Felder ϕ vs A^μ. Das Klein-Gordon-Feld hat Spin $s = 0$, das elektromagnetische Feld $s = 1$. Das Gravitationsfeld hat übrigens Spin $s = 2$ – hier ziehen sich gleichnamige Ladungen (das sind die Massen=Quellen des Gravitationsfeldes) an, wie jeder aus eigener Erfahrung zu berichten weiß ...