Kapitel 10

Kanonische Quantisierung

In der sog. **kanonischen Quantisierung** kommen “Hüte auf Felder”, womit aus ihnen Operatoren werden, und es wird die klassische Poissonklammer durch den quantenmechanischen Kommutator ersetzt,

$$\begin{aligned} \phi_a, \pi_a &\rightarrow \hat{\phi}_a, \hat{\pi}_a \\ \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{PB}} &\rightarrow \tfrac{i}{\hbar}\,[\cdot,\cdot]\,. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Insbesondere werden die kanonischen Poissonklammern () übersetzt

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_a(\vec{x},t), \hat{\pi}_b(\vec{y},t)\right] &= i\hbar\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \\ \left[\hat{\phi}_a(\vec{x},t), \hat{\phi}_b(\vec{y},t)\right] &= [\hat{\pi}_a(\vec{x},t), \hat{\pi}_b(\vec{y},t)] = 0\,. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Der quantenmechanische Kommutator genügt der gleichen Algebra wie die Poissonklammer der klassischen Mechanik. Trotzdem ist die Quantenversion eines klassischen Systems nicht eindeutig bestimmt. Klassisch ist das Produkt $\phi\pi$ beispielsweise das gleiche wie das Produkt $\pi\phi$. Quantenmechanisch sind die Produkte aber angesichts der Kommutatorrelationen () unterschiedlich, $\hat{\phi}\hat{\pi} \neq \hat{\pi}\hat{\phi}$.

10.1 Reelles Klein-Gordon-Feld

In Quantisierung wird aus dem reellen Klein-Gordon-Feld $\phi^* = \phi$ ein selbstadjungiertes Quantenfeld $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$, aus dem kanonisch konjugierte Feld π das selbstadjungierte Quantenfeld $\hat{\pi} = \hat{\pi}^\dagger$. Die kanonischen Kommutarrelationen () lesen sich im Programm der kanonischen Quantisierung

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] &= i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,, \\ \left[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\phi}(\vec{x}',t)\right] &= \left[\hat{\pi}(\vec{x},t), \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Hamiltonoperator und Gesamtimpuls können direkt aus () bzw () übernommen werden,

$$\hat{H} = \int \left\{ \frac{c^2}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\hat{\phi}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\hat{\phi}^2 \right\} d^3x\,, \tag{10.4}$$

$$\hat{P} = -\int \hat{\pi}\vec{\nabla}\hat{\phi} d^3x\,. \tag{10.5}$$

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\hat{\phi}} \equiv \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\phi}\right] = c^2\hat{\pi} \tag{10.6}$$

$$\dot{\hat{\pi}} \equiv \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\pi}\right] = \Delta\hat{\phi} - \mu^2\hat{\phi} \tag{10.7}$$

implizieren eine Klein-Gordon-Gleichung für das Quantenfeld $\hat{\phi}$,

$$\Box\hat{\phi} + \mu^2\hat{\phi} = 0\,. \tag{10.8}$$

Jedes Operatorfeld $\hat{\phi}$, das der Klein-Gordon-Gleichung genügt, kann als Fourierreihe einfacher Ebenen-Wellen-Lösungen entwickelt werden

$$\hat{\phi}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \left[\frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}} V}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right) \equiv \hat{\phi}^{(+)}(\vec{x},t) + \hat{\phi}^{(-)}(\vec{x},t) \tag{10.9}$$

wo V das Quantisierungsvolumen und

$$\omega_{\vec{k}} = +c\sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} \tag{10.10}$$

die Dispersionsrelation der freien Klein-Gordon Wellen.

Hier und im weiteren Verlauf bezeichnen hochgestellte $(+)$ bzw $(-)$ immer den **positiven** bzw. **negativen Frequenzanteil** eines Feldes. Im positiven Frequenzanteil drehen sich die Partialamplituden in der komplexen Ebene im Uhrzeigersinn, im negativen Frequenzanteil gegen den Uhrzeigersinn.

Für das kanonisch konjugierte Feld $\hat{\pi}$ lautet angesichts $\hat{\pi} = \frac{1}{c^2}\dot{\hat{\phi}}$ die entsprechende Entwicklung

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = -\frac{i}{c^2} \sum_{\vec{k}} \left[\frac{\hbar\omega_{\vec{k}} c^2}{2V}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right) \equiv \hat{\pi}^{(+)}(\vec{x},t) + \hat{\pi}^{(-)}(\vec{x},t) \tag{10.11}$$

Die Normierungskonstante ist so gewählt, dass für die Operatoren $\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ Vertausschungsrelationen gelten,

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,, \\ \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}\right] &= \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Diese Kommutatoralgebra gleicht den Kommutatorrelationen einer Menge unabhängiger harmonischer Oszillatoren. Entsprechend wird $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ als **Erzeugungsoperator**, $\hat{a}_{\vec{k}}$ als **Vernichtungsoperator**, und

$$\hat{n}_{\vec{k}} := \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} \tag{10.13}$$

als **Teilchenzahloperator** interpretiert, dessen Eigenwerte $n_{\vec{k}} = 0, 1, \ldots$ die Zahl der Teilchen mit Impuls $\hbar\vec{k}$.

Für den Hamiltonoperator bzw. Impulsoperator des quantisierten Klein-Gordon-Feldes ergibt sich nach Einsetzen von () in () bzw. ()

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(vorläufig)} \tag{10.14}$$

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k}} \hbar\vec{k}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}\,. \tag{10.15}$$

Der Hamiltonoperator involviert eine unendliche Nullpunktsenergie. Da in Experimenten immer nur Energiedifferenzen gemessen werden, und da bei Differenzbildung die Nullpunktsenergie herausfälllt, kann sie von Anfang “gestrichen” werden.[1] Bei genauem Hinsehen erweist sich die Nulpunktsenergie als Resultat eines bestimmten

[1]Die Nullpunktsenergie ist unendlich, hängt aber entscheidend vom Quantisierungsvolumen V ab. Nimmt man hier zwei verschiedene Volumina V_1 und V_2, berechnet die Differenz der Nullpunktsenergien, und fragt sich wie diese Differenz unter Aufteilung des Gesamtvolumens variiert, erhält man eine endliche Kraft, die sich im Casimir-Effekt bemerkbar macht.

Vorurteils was die Anordnung der positiven und negativen Frequenzanteile betrifft. Solche Vorurteile sind klassisch irrelevant, machen sich aber quantenmechnisch bemerkbar. Um solche Kalamitäten zu vermeiden, wird das Rezept der kanonischen Quantisierung um eine weiteres, die Anordnung von Operatoren betreffendes Posutulat ergänzt:

Postulat (Normalordnung): Die quantenmechanische Version einer klassischen Observable ist die **Normalordnung**, in der alle positiven Frequenzanteile rechts von den negativen Frequenzanteilen angeordnet sind.

Mit dieser Vorschrift liest sich die quantenmechanische Version des klassischen Hamiltonfunktionals ()

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \,, \tag{10.16}$$

im Vergleich mit () also ohne Nullpunktsenergie, wie erhofft.

Die Algebra der Leiteroperatoren ist invariant unter der kontinuierlichen Transformation

$$\hat{a} \to \hat{a}' = e^{-i\varphi}\hat{a} \,, \qquad \hat{a}^\dagger \to \hat{a}^{\dagger\prime} = e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger \,, \tag{10.17}$$

d.h. die Transformation ist *kanonisch*.[2] Offensichtlich ist der Hamiltonoperator invariant unter der Transformation (), d.h. () ist eine Symmetrie der Klein-Gordon-Theorie. In den Übungen überzeugen Sie sich, dass

$$\frac{i}{\hbar} \int \left[\hat{\phi}^{(-)} \hat{\pi}^{(+)} - \hat{\pi}^{(-)} \hat{\phi}^{(+)} \right] = \sum_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} := \hat{N} \tag{10.18}$$

[2]Für das Punktteilchen in einer Raumdimension mit Koordinate q und Impuls p liest sich die entsprechend Transformation $q \to q' = \cos(\varphi) q + \frac{1}{m\omega}\sin(\varphi) p$, $p \to p' = \cos(\varphi) p - m\omega \sin(\varphi) p$.

die entsprechende Nötherladung (zeitliche Erhaltungsgröße), interpretiert **Gesamtteilchenzahl**.

Sei nun $|\psi_N\rangle$ irgendein Eigenzustand der Gesamtteilchenzahl zum Eigenwert N, also $\hat{N}|\psi_N\rangle = N|\hat{\psi}_N\rangle$. Dann ist $\hat{\phi}^{(+)}|\psi_N\rangle$ Eigenzustand von $\hat{N}$ zum Eigenwert $(N-1)$, d.h. die Wirkung von $\phi^{(+)}$ vernichtet ein Teilchen und die Wirkung von $\hat{\phi}^{(-)}$ erzeugt ein Teilchen.

10.2 Vakuumfluktuationen

Im Vakuumzustand $|0\rangle$ ist die Feldenergie minimal (gleich Null) – d.h. $|0\rangle$ definiert den Grundzustand der Theorie. Auch der Erwartungswert des Feldes ist in diesem Zustand gleich Null, $\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle = 0$, nicht aber seine Fluktuationen. Ein Maß für die Fluktuationen vermittelt die Korrelationsfunktion $\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle$. Unter Verwendung der Moden-Entwicklung (), und Beachtung $\hat{a}|0\rangle = 0$, findet man schnell

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle = \frac{\hbar c}{V}\sum_{\vec{k}} \frac{c}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-i(\omega_{\vec{k}}(t-t')-\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}'))} \tag{10.19}$$

$$:= i\hbar c\Delta^{(+)}(x-y)\,. \tag{10.20}$$

Die hier definierte Funktion $\Delta^{(+)}$ und ihre konjugiert-komplexe Schwester

$$\Delta^{(-)}(x-y) = [\Delta^{(+)}(x-y)]^* \equiv -\Delta^{(+)}(y-x) \tag{10.21}$$

werden uns noch häufiger begegnen. Im Kontinuum-Limes $V^{-1}\sum_{\vec{k}} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

$$\Delta^{(+)}(x-x') = -ic\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-ik(x-x')}\,. \tag{10.22}$$

Für $y \to x$ schaut man nun auf

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)^2|0\rangle = \hbar c^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}, \tag{10.23}$$

offensichtlich quadratisch UV-divergent. Im Unterschied zur Nullpunktsenergie kann diese Divergenz nicht durch eine Normalordnung oder ähnlich einfache Vorschrift beseitigt werden. Vielmehr ist das Auftreten solcher (und anderer) Divergenzen typisch für alle lokalen Theorien. Im Rezeptbuch der **Renormierung** wird geklärt, welche Divergenzen unproblematisch sind, und wie man aus ihnen in einem rationalen Verfahren physikalisch sinnvolle Aussagen extrahiert.

Im übrigen ist die Divergenz () in physikalischer Hinsicht nicht weiter verwunderlich. Sie besagt ja nur, dass die Messung des Quadrats einer Feldamplitude *in einem Punkt* unsinnig ist. Kein Wunder – um einen einzelnen Raum-Zeitpunkt zu lokalisieren bedarf es unendlich großer Frequenzen und unendlich kleiner Wellenlängen – und die sind halt nur bei Einsatz unendlich großer Energien erreichbar.

10.3 Darstellung von $\Delta^{(+)}$

Weil man immer gerne wissen möchte, wie eine irgendwie definierte Funktion denn nun konkret aussieht, hier die Darstellung von $\Delta^{(+)}(x)$ mittels Zylinderfunktionen (alte Sprechweise) bzw Besselfunktionen (neue Sprechweise).

Für die d^3k-Integration der Definition (10.22) verwendet man sinnigerweise Kugelkoordinaten $\int d^3k = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\pi}^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta$, schreibt $\vec{k}\cdot\vec{x} = kr\cos(\vartheta)$ (d.h. $\vec{x}$ definiert die "z-Achse" der $\vec{k}$-Koordinaten) führt ungestört die φ-Integration durch, substituiert $\vartheta \to u := \cos(\vartheta)$, fürt die u-Integration aus, und schaut auf das Zwi-

Bessel-Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung $z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$. Man unterscheidet Bessel-Funktionen der ersten Art $J_{\pm\nu}$, der zweiten Art N_ν (auch genannt Neumann-Funktionen), und der dritten Art $H_\nu^{(1)}$ bzw $H_\nu^{(2)}$ (auch genannt Hankel-Funktionen),

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \tag{10.24}$$
$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(z) - iN_\nu(z) \tag{10.25}$$

Eine gebräuchliche Integraldarstellung der Besselfunktionen 0-ter Ordnung vermittelt

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(x\cosh t)\,dt \tag{10.26}$$
$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cosh t)\,dt \tag{10.27}$$

und es gilt $J_1(z) = -J_0'(z)$, $N_1(z) = -N_0'(z)$.

Modifizierte Bessel-Funktionen sind Lösungen der Differentialgleichung $z^2w'' + zw' - (z^2 + \nu^2)w = 0$. Man unterscheidet $I_{\pm\nu}$ und K_ν, letztere auch genannt McDonald-Funktionen. Eine gebräuchliche Integraldarstellung der McDonald-Funktion 0-ter Ordnung vermittelt

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x\sinh t)\,dt \tag{10.28}$$

und es gilt $K_1(z) = -K_0'(z)$.

schenergebnis

$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \underbrace{\frac{k}{\sqrt{k^2+\mu^2}} e^{-i\sqrt{k^2+\mu^2}ct}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)}_{:=I(k)} dk \tag{10.29}$$

Man nutzt nun die Parität des verbleibenden Integranden um das k-Integral von $-\infty$ bis ∞ zu erstrecken, wälzt die verbleibende Potenz k auf eine Ableitung nach r ab, macht abschließend von einer Variablensubstitution $k \to \eta$ mit $k = \mu \sinh(\eta)$ Gebrauch, und schaut auf

$$\Delta^{(+)}(x) \;=\; \frac{i}{8\pi^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left\{-i\mu\left[ct\cosh(\eta) - \sinh(\eta)r\right]\right\} . \tag{10.30}$$

O.B.d.A. darf hier $t \geq 0$ angenommen werden; der Fall $t < 0$ lässt sich Dank $\Delta^{(+)}(t<0) = -[\Delta^{(+)}(t>0)]^*$ auf die Kenntnis von $\Delta^{(+)}(t>0)$ zurückführen. Für den letzten Schritt sind dann noch zu unterscheiden $ct > r$ vs $ct < r$.

Im Falle $ct > r$, d.h. x zeitartig bezüglich des Ursprung-Ereignisses O, $x^2 = c^2t^2 - r^2 > 0$, greift man zur Parametrisierung $ct = \sqrt{x^2}\cosh(\theta), r = \sqrt{x^2}\sinh(\theta)$, erinnert sich an das Additionstheorem $\cosh\eta\cosh\theta - \sinh\eta\sinh\theta = \cosh(\eta-\theta)$, schaut nach einer einfachen Variablensubstitution $\eta - \theta \to \eta$ auf eine Integraldarstellung der Hankelfunktion $H_0^{(2)}(\mu\sqrt{x^2})$, und erhält nach Ausführung der r-Ableitung $\Delta^{(+)}|_{x^2>0} = \frac{1}{8\pi}\frac{\mu}{\sqrt{x^2}}H_1^{(2)}(\mu\sqrt{x^2})$.

Im Falle $r > ct$, d.h. x ist raumartig bezüglich O, $x^2 = c^2t^2 - r^2 < 0$, greift man zur Parametrisierung $ct = \sqrt{-x^2}\sinh(\theta), r = \sqrt{-x^2}\cosh(\theta)$, erinnert sich an das Additionstheorem $\cosh\eta\sinh\theta - \sinh\eta\cosh\theta = -\sinh(\eta-\theta)$, schaut auf eine Integraldarstellung der McDonald-Funktion $K_0(\mu\sqrt{-x^2})$, und erhält nach Ausführung der r-Ableitung $\Delta^{(+)}|_{x^2<0} = -\frac{i}{4\pi^2}\frac{\mu}{\sqrt{-x^2}}K_1(\mu\sqrt{-x^2})$.

Im Falle $r = ct$, d.h. auf dem Lichtkegel $x^2 = 0$, konvergiert das Integral (10.29) nicht. Der Integrand entwickelt für große k einen nicht-oszillierenden Anteil, $\lim_{k\to\infty} I(k)|_{ct=r} \sim (1-e^{-2ikr})$, d.h. $\Delta^{(+)}$ ist keine reguläre Funktion, sondern eine Distribution mit einer Singularität bei $ct = r$. Da die Singularität offensichtlich von Beiträgen des Bereichs $k \to \infty$ bestimmt ist, kann zu ihrer Bestimmung $\sqrt{k^2 + \mu^2}$ durch k ersetzt werden, so dass $\Delta^{(+)}|_{\text{sing}} = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-ikct}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)$. Auswertung des Integrals ergibt $\Delta^{(+)}|_{\text{sing}} = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{i}{4\pi^2}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$. Der Hauptwert $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ erweist sich als die analytische Fortsetzung der für $x^2 \neq 0$ bereits bestimmten Funktion $\Delta^{(+)}(x)$, so dass endgültig

$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \Theta(x^2)\frac{1}{8\pi}\frac{\mu}{\sqrt{x^2}}H_1^{(2)}(\mu\sqrt{x^2}) - \Theta(-x^2)\frac{i}{4\pi^2}\frac{\mu}{\sqrt{-x^2}}K_1(\mu\sqrt{-x^2}) \tag{10.31}$$

im Falle $x^0 = ct > 0$. Der Fall $x^0 < 0$ lässt sich dank $\Delta^{(+)}(x^0 < 0) = -[\Delta^{(+)}(x^0 > 0)]^*$ leicht aus (10.31) bestimmen.

10.4 Mikrokausalität

Kanonische Kommutatoren sind *Gleichzeit-Kommutatoren*; jetzt betrachten wir Kommutatoren des reellen Klein-Gordon-Feldes zu *unterschiedlichen Zeiten*.

$$\begin{aligned}\left[\hat\phi(\vec x, t), \hat\phi(\vec x', t')\right] &= \frac{\hbar c}{V}\sum_{\vec k}\frac{c}{2\omega_{\vec k}}\left(e^{-i(\omega_{\vec k}(t-t')-\vec k\cdot(\vec x-\vec x'))} - e^{+i(\omega_{\vec k}(t-t')-\vec k\cdot(\vec x-\vec x'))}\right)\\ &:= i\hbar c\Delta(x - x')\end{aligned} \tag{10.32}$$

mit $x \equiv (x^\mu) = (ct, \vec x)$ Koordinatenvektor. Die hier eingeführte Funktion $\Delta(x)$ heißt **Pauli-Jordan Funktion**. Mit Blick auf (10.20) und (10.21) offensichtlich

$$\Delta(x - x') = \Delta^{(+)}(x - x') + \Delta^{(-)}(x - x')\,. \tag{10.33}$$

Im Kontinuum-Limes $V^{-1}\sum_{\vec{k}} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ findet man nach kurzer Überlegung[3] eine Integraldarstellung

$$\Delta(x) = -2\pi i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\delta(k^2-\mu^2)\mathrm{sgn}(k_0)e^{-ikx}\,, \tag{10.35}$$

wo $k=(k^\mu)=(\omega/c,\vec{k})$ Wellenvektor, $k^2=k_\mu k^\mu$, und $kx=k_\mu x^\mu$.

Da jeder Term unter eigentlichen orthochronen Lo'tras ein Skalar,[4] ist die Pauli-Jordan-Funktion Lorentz-invariant. Mit Blick auf die Definition () ist nun offensichtich

$$\Delta(x-x')|_{t=t'} = 0\,. \tag{10.36}$$

Da der 4er Vektor $x-x'$ für $t=t'$ negative Minkowski-Norm, $(x-x')^2 = -(\vec{x}-\vec{x}')^2 < 0$, bedeutet () in Verbund mit der Lorentzinvarianz von Δ insbesondere

$$\Delta(x-x') = 0 \quad \text{für} \quad (x-x')^2 < 0\,, \tag{10.37}$$

kurz: die Operatorwerte des Klein-Gordon-Felds zu Aufpunkten mit raumartigem Abstand kommutieren bzw sind gemeinsam scharf messbar. Sie können sich, anders gesagt, nicht beeinflussen: Einflussnahme ist nur möglich für Aufpunkte mit einem zeitartigen Abstand. Man sagt, das Klein-Gordon-Feld genüge der Forderung nach **Mikrokausalität**.

[3]…und unter Verwendung der Identität

$$\delta(k^2-\mu^2) = \delta[k_0^2-(\omega_{\vec{k}}/c)^2] = \frac{c}{2\omega_{\vec{k}}}\left(\delta[k_0-\omega_{\vec{k}}/c]+\delta[k_0+\omega_{\vec{k}}/c]\right) \tag{10.34}$$

nebst $\delta[k_0-\omega_{\vec{k}}/c] = \mathrm{sgn}(k_0)\delta[k_0-\omega_{\vec{k}}/c]$ sowie $\delta[k_0+\omega_{\vec{k}}/c] = -\mathrm{sgn}(k_0)\delta[k_0+\omega_{\vec{k}}/c]$ – schließlich ist $\omega_{\vec{k}}$ immer positiv.

[4]Das gilt auch für die Vorzeichenfunktion $\mathrm{sgn}(k_0)$. Unter eigentlichen, d.i. orthochronen Lotras ändert sich das Vorzeichen von k_0 nicht – zeitartige Wellenvektoren mit $k_\mu k^\mu = \mu^2 > 0$ mit $k_0 > 0$ liegen immer im Vorwärts-Lichtkegel, solche mit $k_0 < 0$ immer im Rückwärts-Lichtkegel.

Entscheidend für die Mikrokausalität des Klein-Gordon-Feldes ist seine Quantisierung mittels Kommutatoren. Würde man das Feld nämlich mit Antimommutatoren quantisieren, ergäbe sich eine Pauli-Jordan-Funktion

$$\Delta_1(x-x') := \Delta^{(+)}(x-x') - \Delta^{(-)}(x-x') \tag{10.38}$$

die sich im relativen Vorzeichen von der bosonischen Variante () unterscheidet. Die Analyse der Funktion Δ_1 fördert zu Tage, dass $\Delta_1(x-x')$ keineswegs gleich Null für Aufpunkte x, x' mit raumartigem Abstand. Ein Spin-0 Feld, wie das Klein-Gordon-Feld muss also bosonisch quantisiert werden um der Forderung nach Mikrokausalität zu genügen! Wie wir später sehen werden, muss ein Spin-$\frac{1}{2}$-Feld, wie das Diracfeld, mit Antikommutatoren quantisiert werden, um der Forderung nach Mikrokausalität zu genügen. Die allgemeine Formulierung dieses Sachverhalts in Form des sog. **Spin-Statistik-Theorems** verdanken wir Wolfgang Pauli und Markus Eduard Fierz:[5] Felder zu ganzzahligem Spin $= 0, 1, 2, \ldots$ sind bosonisch zu quantisieren, Felder zu halbzahligem Spin $= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ sind fermionisch zu quantisieren um der Mikrokausalität zu genügen.

Die Pauli-Jordan-Funktion Δ genügt der homogenen Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + \mu^2)\Delta(x) = 0 \tag{10.39}$$

zu Anfangswerten

$$\Delta(x)|_{x^0=0} = 0\,, \qquad \partial^0\, \Delta(x)\|_{x^0=0} = -\delta^{(3)}(\vec{x})\,. \tag{10.40}$$

In der Tat ist $\Delta(x)$ durch diese Eigenschaften bereits vollständig bestimmt. Der Differentialoperator $\Box + \mu^2$ ist nämlich hyperbolisch, und für solche Operatoren gilt, dass die Lösung des Anfangswertproblems durch die Vorgabe von $\Delta(x)$ und $\dot{\Delta}(x)$ auf der raumartigen Hyperfläche $t = 0$ eindeutig.

[5] W. Pauli, Phys. rev. **58**, 716 (1940); M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).

Weil wir schon wissen, wie $\Delta^{(+)}$ aussieht, ist es ein Leichtes, das Aussehen von Δ anzugeben

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{sgn}(x_0)\delta(x^2) + \frac{\mu}{4\pi\sqrt{x^2}}\mathrm{sgn}(x_0)\Theta(x^2)J_1(\mu\sqrt{x^2}) \tag{10.41}$$

wo J_1 die Besselfunktion erster Ordnung. Ausserhalb des Vorwärts- und Rückwärts-Lichtkegel gleich Null, auf den Lichtkegeln singulär, und innerhalb oszillierend.

Weil wir gerade so schön dabei sind, hier noch die Funktion Δ_1

$$\Delta_1(x) = -i\frac{\mu}{4\pi\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)N_1(\mu\sqrt{x^2}) - i\frac{\mu}{2\pi^2\sqrt{-x^2}}\Theta(-x^2)K_1(\mu\sqrt{-x^2}) \tag{10.42}$$

mit N_1 die Neumannfunktion erster Ordnung, und K_1 die McDonald-Funktion erster Ordnung. Für raumartige Argumente ist K_1 ausschlaggebend, verschieden von Null, mit exponentiellem Abfall für wachsende (raumartige) Entfernung.

10.5 Komplexes Klein-Gordon-Feld

Das komplexe Klein-Gordon-Feld Φ lässt sich auffassen $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ wobei ϕ_1 und ϕ_2 zwei verschiedene reelle Klein-Gordon-Felder, allerdings zur gleichen Masse. Führt man an dieser Stelle Operatoren ein

$$\hat{b}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2\right) , \qquad \hat{d}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2\right) . \tag{10.43}$$

lässt sich die Modenentwicklung des freien Klein-Gordon-Feldes angeben

$$\Phi(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}V}}\left[\hat{b}_{\vec{k}}e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{d}^{\dagger}_{\vec{k}}e^{+i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right] \tag{10.44}$$

Die hier eingeführten Ops sind bosonische Operatoren, d.h. sie genügen Vertauschungsrelationen. Im positiven Frequenzanteil werden b-Teilchen vernichtet, im negativen Frequenzanteil werden d-Teiclhen erzeugt.

Der Hamiltonoperator erweist sich

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}} + \hat{d}^\dagger_{\vec{k}} \hat{d}_{\vec{k}} \right) \tag{10.45}$$

Die klassische Theorie ist $U(1)$- invariant, die dazugehörige Noetherladung in () angegeben. Die Quantenversion lautet

$$\hat{Q} = q \sum_{\vec{k}} \left(\hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}} - \hat{d}^\dagger_{\vec{k}} \hat{d}_{\vec{k}} \right) \tag{10.46}$$

also bestimmt durch die Differenz der Teichenzahl von b- und d-Teilchen.

Unter der Abbildung $\mathcal{C} : \hat{\Phi} \mapsto \hat{\Phi}_C := \hat{\Phi}^\dagger$ offensichtlich $\hat{b} \mapsto \hat{b}_C = \hat{d}, \hat{d} \mapsto \hat{d}_C = \hat{b}$, und also $\hat{Q} \mapsto \hat{Q}_C = -\hat{Q}$. Die Abbildung $\mathcal{C}$, genannt **Ladungskonjugation**, vertauscht offensichtlich die Rollen der b- und d-Teilchen: b- und d-Teilchen sind Teilchen-Antiteilchen Partner, d.h. sie stimmen in allen intrinsichen Eigenschaften überein (Masse $= m$, Spin $= 0$), nur nicht in der Ladung.

Wechselwirkungsbild? ... wird gerne herangezogen, um eine Schrödingergleichung

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))|\psi(t)\rangle \tag{10.47}$$

in einer (formalen) Potenzreihe in $\hat{V}$ zu lösen. Mit

$$\hat{U}_0(t, t_0) := \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 (t - t_0) \right\} \tag{10.48}$$

der Zeitentwicklungsoperator der ungestörten Theorie, und

$$|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle := \hat{U}_0^\dagger(t, t_0)|\psi(t)\rangle \tag{10.49}$$

der Zustandsvektor im Wechselwirkungsbild, erweist sich () äquivalent

$$i\hbar|\dot{\psi}_I(t)\rangle = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle \tag{10.50}$$

wobei

$$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0 \hat{V}(t) \hat{U}_0(t, t_0) \tag{10.51}$$

die Störung im Wechselwirkungsbild. Zum Referenzzeitpunkt t_0 sind die Zustandsvektoren und Operatoren des Wechselwirkungsbildes durch die entsprechenden Größen im Schrödingerbild bestimmt.

10.6 Der Meson-Propagator

Die inhomogene KG

$$\left(\Box + \mu^2\right) \hat{\Phi}(\vec{x}, t) = -j(\vec{x}, t) \tag{10.52}$$

wird durch einen Hamiltonoperator beschrieben,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \int j^*(\vec{x}, t)\Phi(\vec{x}) + j(\vec{x}, t)\Phi^\dagger(\vec{x}) d^3x \tag{10.53}$$

der sich nur im Zusatzterm vom ungestörten Hamiltonoperator () unterscheidet.

$$i\hbar|\dot{\psi}_{\mathrm{I}}(t)\rangle = \hat{H}_{\mathrm{I}}(t)|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle \,. \tag{10.54}$$

$$|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle = \mathsf{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t')dt'\right)|\psi_{\mathrm{I}}(t_i)\rangle \tag{10.55}$$

Der Vakuumwert des T-Produkts definiert den **Feynman-Propagator** der Klein-Gordon Theorie,

$$\langle 0|\mathsf{T}\left\{\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}^{\dagger}(x')\right\}|0\rangle := i\hbar c\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') \tag{10.56}$$

beschreibt im Fall $t > t'$ die Propagation von b-Teilchen $x' \to x$, im Fall $t' > t$ die Propagation von d-Teilchen (=Anti-b-Teilchen) von $x \to x'$. Um die Diagrammatik nicht mit Buchstaben unnötig aufzuladen, wird die Propagation eines Teilchens mit einem zukunftsweisenden Pfeils dargestellt, die Propagation eines Antiteilchens mit einem vergangenheitsweisenden Pfeil. Antiteilchen sind Teilchen, die sich rückwärt in der Zeit entwickeln.

Der Feynman-Propagator ist eine **Greensfunktion** der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left[\Box_x + \mu^2\right]\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') = -\delta^4(x-x') \tag{10.57}$$

10.7 Quantisierung des freien Diracfeldes

Unschwer weist man nach, dass die Diracgleichung (7.9) und ihre konjugierte Schwester Euler-Lagrangegleichungen zur Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{D}} &= c\bar{\Psi}\left[i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right]\Psi && (10.58)\\ &= \Psi^{\dagger}(x)\left[i\hbar\partial_t + i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - mc^2\right]\Psi\,. && (10.59) \end{aligned}$$

wobei Variationen in Ψ und $\bar{\Psi}$ als unabhängig anzusehen sind: Variation $\delta\Psi^*$ liefert die Dirac-Gleichung (7.9), Variation $\delta\Psi$ liefert ihre adjungierte Schwester.

Kanonisch konjugierter Impulsfelder

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}(\vec{x},t)} = i\hbar\Psi^{\dagger}(\vec{x},t)\,, \qquad \bar{\pi}(\vec{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\bar{\Psi}}(\vec{x},t)} = 0\,. \tag{10.60}$$

die klassischen Poissonklammern

$$\frac{\hbar}{i}\left\{\Psi_a(\vec{x},t), \Psi_b^*(\vec{x}',t)\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,, \tag{10.61}$$

sowie Hamiltonfunktional des Dirac-Feldes

$$H_{\mathrm{D}}[\Psi,\Psi^{\dagger}] = \int \Psi^{\dagger}\left[c\vec{\alpha}\cdot\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + mc^2\beta\right]\Psi d^3x\,. \tag{10.62}$$

Offensichtlich kann das Funktional(!) $H_{\mathrm{D}}[\Psi,\Psi^{\dagger}]$ als quantenmechanischer Erwartungswert des ein-Teilchen Hamiltonoperators H_{D} gelesen werden. Eine solche Deutung ist in der Klein-Gordon-Theorie nicht möglich.

Lagrange- und Hamiltonformalismus der Dirac-Theorie weisen Besonderheiten auf:

- Die Lagrangedichte (10.58) ist nicht reell. Die Lagrandgedichte $\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)$ ist reell, unterscheidet sich von (10.58) nur durch eine 4er Divergenz, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{i}{2}\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)$, d.h. $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ sind dynamisch äquivalent (geben Anlass zu den gleichen ELG).
- Die Felder ψ, $\dot{\psi}$, $\bar{\psi}$ und $\dot{\bar{\psi}}$ sind keine unabhängigen Variable. Der zu $\bar{\psi}$ kanonisch konjugierte Impuls ist Null, der zu ψ kanonisch konjugierte Impuls ist ein Konfigurationsvariable, und keine verallgemeinerte Geschwindigkeit. Der Phasenraum ist nicht 4-dimensional, sondern nur 2-dimensional. In den Übungen wird gezeigt, wie damit umzugehen ist, und dass die Audsdrücke für das Hamitonfunktional und die Poissonklammern korrekt sind.

Für die Quantisierung der Dirac-Theorie lässt man sich am einfach von der zweiten Quantisierung der Schrödinger-Theorie leiten. Aus (10.62) wird der Dirac-Hamiltonian

$$\hat{H}_{\mathrm{D}} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}) \left[mc^2\beta + \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} \right] \hat{\Psi}(\vec{x})\,. \tag{10.63}$$

und aus dem klassischen Diracfeld Ψ wird das quantisierte Diracfeld $\hat{\Psi}$.

Der Feldoperator wird nach der Orthonormalbasis entwickelt,

$$\hat{\Psi} = \sum_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s}\mathsf{u}_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + \sum_{\vec{p},s} \tilde{c}_{\vec{p},s}\mathsf{v}_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \tag{10.64}$$

worin $\hat{c}$ Vernichtungsoperatoren für Elektronen zu positivem $\varepsilon = E(\vec{p})$, und $\tilde{c}$ Vernichtungsoperatoren für Elektronen zu negativem $\varepsilon = -E(\vec{p})$.

Gemäß Löchertheorie ist die Vernichtung eines $(\vec{p}, s)$-Elektrons zu negativem ε gleichbedeutend der Erzeugung eines $(-\vec{p}, -s)$-Positrons zu positivem ε. Daher

$$\tilde{c}_{\vec{p},s} = \hat{d}^\dagger_{-\vec{p},-s}\,, \qquad \tilde{c}^\dagger_{\vec{p},s} = \hat{d}_{-\vec{p},-s}\,. \tag{10.65}$$

wobei von nun an Operatoren $\hat{c}^\dagger$ bzw $\hat{c}$ Erzeuger bzw Vernichter von Elektronen, und $\hat{d}^\dagger$ bzw $\hat{d}$ Erzeuger und Vernichter von Positronen. Dabei ist zu beachten, dass Elektron und Positron Teilchen der gleichen Sorte "Diracteilchen". Ein Elektron ist ein Diracteilchen im Zustand "Ladung $-|e_0|$", ein Positron ist ein Diracteilchen im Zustand "Ladung $+|e_0|''$.

Nach Umbenennung der Summationsvariablen in der zweiten Summe von Gl. (10.64)

$$\hat{\Psi} = \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{c}_{\vec{p},s} \mathsf{u}_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^+} + \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} \mathsf{v}_{-\vec{p},-s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^-} . \tag{10.66}$$

Im "positive Frequenzanteil" werden Elektronen vernichtet, im "negativen Frequenzanteil" werden Positronen erzeugt. Im adjungierte Feld

$$\hat{\Psi}^\dagger = \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{c}^\dagger_{\vec{p},s} \mathsf{u}^\dagger_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^{\dagger -}} + \underbrace{\sum_{\vec{p},s} \hat{d}_{\vec{p},s} \mathsf{v}^\dagger_{-\vec{p},-s} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{:=\hat{\Psi}^{\dagger +}} \tag{10.67}$$

werden Elektronen im negativen Frequentanteil erzeugt, Positronen im positiven Frequenzanzteil vernichtet.

Einsetzen in (10.63), Ausführen der x-Integration, dabei die Orthonormalitätsrelationen der u und v beachten, erhält man

$$\hat{H}_{\mathrm{D}} = \sum_{\vec{p},s} E_\nu \hat{c}^\dagger_\nu \hat{c}_\nu + (-E_\nu) \hat{d}_{\vec{p},s} \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s} , \qquad \text{(vorläufig)} . \tag{10.68}$$

Quantisierung mit Kommutatoren würde hier zu einem "negativen Energie-Desaster" führen. Statt dessen, in Übereinstimmung mit Pauli-Verbot, Quantisierunge mittels Antikommutatoren,

$$\left\{ \hat{c}_{\vec{p},s}, \hat{c}^\dagger_{\vec{p}',s'} \right\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} , \qquad \left\{ \hat{d}_{\vec{p},s}, \hat{d}^\dagger_{\vec{p}',s'} \right\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} , \tag{10.69}$$

und alle anderen Antikommutatoren gleich Null. übertragen auf Feldoperatoren

$$\left\{\hat{\Psi}_a(\vec{x}), \hat{\Psi}_{a'}(\vec{x}')\right\} = \left\{\hat{\Psi}^\dagger_a(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger_{a'}(\vec{x}')\right\} = 0\,, \tag{10.70}$$

$$\left\{\hat{\Psi}_a(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger_{a'}(\vec{x}')\right\} = \delta_{aa'}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,. \tag{10.71}$$

wo $\hat{\Psi}_a$ die a-te Komponente des Diracspinors, $a = 1, 2, 3, 4$.

Berücksichtigt man die Antikommutationsregeln im Hamiltonoperator (10.68) schaut man zunächst auf $\hat{H} = E_{\text{vac}} + \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p})\left(\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{c}_{\vec{p},s} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s}\right)$ mit $E_{\text{vac}} = -\sum_{\vec{p},s} E(\vec{p})$ die Nullpunktsenergie, im Sinne der Dirac'schen Löchertheorie interpretiert als Energie des Diracsees. Die Nullpunktsenergie ist zwar "Minus-Unendlich", aber als Konstante darf sie getrost unter den Tisch fallen. Definiert man an dieser Stelle die **Normalordnung**, wonach alle Vernichter in einem Operatorprodukt rechts von allen Erzeugern geschrieben, wobei jede Vertauschung der Original-Reihenfolge einen Faktor (-1) impliziert, erscheint die normalgeordnete Version von (10.68)

$$\hat{H}_{\text{D}} = \sum_{\vec{p},s} E(\vec{p})\left(\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{c}_{\vec{p},s} + \hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s}\right) \tag{10.72}$$

also ohne Nullpunktsenergie. Operatoren der Form $\hat{c}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{c}_{\vec{p},s}$ und $\hat{d}^\dagger_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s}$ sind **Anzahloperatoren**. Ihre (fermionischen!) Eigenwerte $0, 1$ geben Auskunft, ob eine $(\vec{p}, s)$-Mode mit einem Elektron oder einem Positron besetzt bzw unbesetzt ist.

Die Normalordnungsvorschrift für Fermionen, notiert $:\cdots:$, sei noch einmal an einem einfachen Beispiel illustriert

$$:\Psi_a\Psi_b: = :(\Psi_a^+ + \Psi_a^-)(\Psi_b^+ + \Psi_b^-): = \Psi_a^+\Psi_b^+ - \Psi_b^-\Psi_a^+ + \Psi_a^-\Psi_b^+ + \Psi_a^-\Psi_b^- \tag{10.73}$$

Als weitere Anwendung die Gesamtladung des Diracfeldes, $\hat{Q} = q\int \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}d^3x$. Unter Verwendung der Modenentwicklung (10.66) bzw (10.67), in Besinnung auf die

Antikommutationsregeln (10.69), und nach Anwendung der Normalordnung

$$\hat{Q} = q \sum_{\vec{p},s} \hat{c}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{c}_{\vec{p},s} - \hat{d}^{\dagger}_{\vec{p},s}\hat{d}_{\vec{p},s}\,, \tag{10.74}$$

also bestimmt durch die Differenz der Gesamtanzahl von Teilchen (Elektronen) und Antiteilchen (Positronen). Ohne Anwendung der Normalordnungsvorschrift träte hier noch eine unendliche Konstante $Q_{\text{vac}} = q\sum_{\vec{p},s}$ auf – die Gesamtladung des Diracsees der Teilchen.

Kontinuumlimes $V \to \infty$, beachte $k = \frac{2\pi}{(V)^{\frac{1}{3}}} n$, $n00, \pm 1, \ldots$,

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \tag{10.75}$$

$$\hat{a}_{\vec{k}} \to \hat{a}(\vec{k}) := \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}\hat{a}_{\vec{k}}\,, \tag{10.76}$$

$$\hat{\phi} = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k}) + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^{\dagger}(\vec{k})\right] \tag{10.77}$$

$$\hat{\pi} = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2c^2}}(-i)\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k}) - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\hat{a}^{\dagger}(\vec{k})\right] \tag{10.78}$$

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^{\dagger}(\vec{k}')\right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\,. \tag{10.79}$$

$$\hat{\phi}(\vec{x},t)|0\rangle = \int d^3k \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}|\hat{\vec{k}}\rangle \tag{10.80}$$

$$|\vec{x}\rangle = \int d^3k|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle \propto \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}|\vec{k}\rangle \tag{10.81}$$

Daher: Im Vakuum erzeugt $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ Teilchen bei $\vec{x}$. Auch

$$\langle 0|\hat{\phi}(\vec{x})|\vec{k}\rangle = \ldots \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \langle\vec{x}|\vec{k}\rangle\,. \tag{10.82}$$