

Kapitel 11

(Quanten-)Elektrodynamik

Quantenelektrodynamik ist Maxwell'sche Elektrodynamik bei der die Ladungs- und Stromdichte von geladenen Diracteilchen getragen wird, etwa Elektronen bzw. Positronen, oder Quarks und Antiquarks ...

11.1 W'hlg klassische Elektrodynamik

Der klassische Rahmen für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie, Sie erinnern sich, sind die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, & \text{GAUSS} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}, & \text{AMPÈRE-MAXWELL} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, & \text{FARADAY} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, & \text{NO NAME,} \end{array} \quad (11.1)$$

wobei in der hier interessierenden mikroskopischen Theorie

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (11.2)$$

mit ϵ_0 die *elektrische Permittivität* des Vakuums (Dielektrizitätskonstante), μ_0 die *magnetische Permeabilität*, und c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$.

Die Maxwell-Gleichungen GAUSS und AMPÈRE-MAXWELL implizieren eine Bilanzgleichung

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad \text{bzw. in der Sprache } \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (11.3)$$

unter Eingeweihten genannte **Kontinuitätsgleichung**. Ausdruck der Ladungserhaltung in der Elektrodynamik.

Das elektromagnetische Feld \vec{E} , \vec{B} lässt sich mittels skalarem Potential Φ und Vektorpotential \vec{A} darstellen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, womit die homogenen Maxwellgleichungen FARADAY und NONAME automatisch befriedigt sind. Verbleiben die inhomogenen Maxwellgleichungen GAUSS und AMPÈRE-MAXWELL. Unschwer weist man nach, dass sie die Euler-Lagrange-Gleichungen zu einer Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{MFW}}(A, \partial A; j) = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \quad (11.4)$$

wo $(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$ die 4er-Stromdichte, $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$ das 4er-Potential, und $(F_{\mu\nu}) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ der Faradaytensor.¹ Die Euler-Lagrangegleichungen lauten

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu \quad \text{bzw.} \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu. \quad (11.6)$$

¹Ausgedrückt in in Laborfeldern

$$\mathcal{L}_{\text{MFW}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\Phi \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} - \rho\Phi \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} - \rho\Phi. \quad (11.5)$$

Bei der Variation zu beachten ist, dass in Bezug auf die Maxwell-Gleichungen die 4er-Stromdichte (j^μ) eine vorgegebenes Feld, das nicht zu variieren ist.

Die Lagrangedichte (11.4) setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, $\mathcal{L}_{\text{M'will}} = \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$. Der Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{rad}}(A, \partial A) = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (11.7)$$

beschreibt das elektromagnetisch Strahlungsfeld im Vakuum, d.h. in Raumregionen wo (j^μ) = (0). Der Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(A; j) = -j_\mu A^\mu \quad (11.8)$$

beschreibt die Kopplung der Quellen j^μ an die Potentialfunktion A^μ des Feldes.

Das physikalische Feld $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ ist invariant unter Transformationen der Potentialfunktion $\Phi \mapsto \Phi' = \Phi + \dot{\chi}$, $\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi$ mit χ beliebige reellwertige Funktion. In 4er-Sprache schreibt sich eine derartige **Eichtransformation** [Ich muss dringend mal die Vorzeichenkonvention in meinen Skripten vereinheitlichen ...]

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x). \quad (11.9)$$

Die Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes, \mathcal{L}_{rad} gem. Gl. (11.7), ist eichinvariant. Der Kopplungsterm \mathcal{L}_{int} , Gl. (11.8), fängt sich unter (11.9) zwar einen Zusatzterm $-j_\mu \partial^\mu \chi = -j^\mu \partial_\mu \chi$ ein, der ist aber angesichts $j_\mu \partial^\mu \chi = \partial^\mu (j_\mu \chi) - (\partial^\mu j_\mu) \chi$, mit Blick auf die 4er-Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu = 0$, dynamisch irrelevant – schließlich trägt die 4er-Divergenz $\partial^\mu (j_\mu \chi)$ zu den Euler-Lagrange-Gleichungen nicht bei.² Eichinvarianz der Elektrodynamik ist auf engste verknüpft mit der “Masselosigkeit” des Strahlungsfeldes – jeglicher “massive” Zusatzterm $\propto A_\mu A^\mu$ zu (11.4) würde die Eichinvarianz verletzen und wäre nicht verträglich mit den Maxwellgleichungen.

²Sehr wohl aber zur Wirkung (wegen Fluss durch die räumlichen Hypertflächen bei t_a und t_b). In der Quantenelektrodynamik besteht man auf Invarianz der Wirkung, was durch die kovarianten Ableitungen allerdings garantiert ist – vgl. weiter unten.

Die Maxwell-Gleichungen liefern kein dynamisches Modell für die zeitliche Entwicklung der Ladungs- und Stromdichte. Bewährt hat sich die Annahme, dass Ladungs- und Stromdichte von Punktladungen getragen werden

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_a(t)), \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_a(t)). \quad (11.10)$$

wobei dem Experiment entnommen wird, dass die Bewegung der Punktladungen den **Newton-Lorentzgleichungen**,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_a \vec{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a(t)^2}{c^2}}} \right) = q_a \left[\vec{E}(\vec{r}_a(t), t) + \vec{v}_a(t) \times \vec{B}(\vec{r}_a(t), t) \right] \quad (11.11)$$

genügen. Postuliert wird, dass sowohl die Ruhmassen m_a als auch die Ladungen q_a intrinsische, d.h. zeitunabhängige Eigenschaften der beteiligten Teilchen. Für die Dichten (11.10) ist somit Ladungserhaltung (11.3) automatisch garantiert.

Die Maxwell-Gleichungen im Verbund mit den Newton-Lorentzgleichungen liefern das **Standard-Modell** der klassischen Physik: in den Maxwell-Gleichungen (11.1) sagt die Materie, wie Feld entsteht und sich bewegt, in den Newton-Lorentzgleichungen (11.11) sagt das Feld wie die Materie sich bewegt.

Die Lagrangefunktion des klassischen Standard-Modells – ihre **Weltformel** – erhält man nun einfach, indem man die Lagrangefunktionen des freien Strahlungsfeldes $L_{\text{rad}} = \int \mathcal{L}_{\text{rad}} d^3x$, die Lagrangefunktion freier Punktteilchen,

$$L_{\text{mat}}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \quad (11.12)$$

und die Lagrangefunktion der Wechselwirkung $L_{\text{int}} = - \int j_\mu A^\mu d^3x$ addiert,

$$L = L_{\text{rad}} + L_{\text{mat}} + L_{\text{int}} \quad (11.13)$$

Wie Sie mittlerweile wissen hat die Weltformel der klassischen Physik nicht lange überlebt: beispielsweise impliziert sie einen “Strahlungskollaps” was nun allerdings unserer anhaltenden Existenz eklatant widerspricht. Zur Rettung kam hier Anfang des 20. Jahrhunderts die Quantenmechanik, bei der zunächst die Materie quantisiert wurde, und schließlich auch das elektromagnetische Feld. Auch wurden neue, bis dato unbekannte, Wechselwirkungsmechanismen – bzw. “Strahlungsfelder” – entdeckt, denken Sie nur an die Kernkräfte, den β -Zerfall, oder den Higgs-Mechanismus der für die Geburt von “Masse” verantwortlich ist.

Überraschend bemerkenswert, dass sich die Grundprinzipien des klassischen Standardmodells auch bei der theoretischen Modellierung all dieser neuen und überraschenden Phänomene bewährt haben: es gibt zwei Typen von Existenzen – Ding (Lepton, Quark) und Medium (elektroschwaches Feld, Gluonfeld). Die über weite Entfernungen zu beobachtende Wechselwirkung von Dingen wird durch Ding-lokale(!) Anregungen der Medien bewirkt: in der Kopplung $j_\mu(\vec{x}, t)A^\mu(\vec{x}, t)$ beeinflusst die Stromdichte j^μ von Ding hier \vec{x} und jetzt t das Medium A^μ hier und jetzt. Die Anregungen von Medium propagieren dann von “hier und jetzt” nach “dort \vec{x} und später $t' > t$ ” um via $j_\mu(\vec{x}', t')A^\mu(\vec{x}', t')$ wiederum die Dinge dort und später zu beeinflussen. Die **ontologische Dichotomie** von “Ding” und “Medium”, gepaart mit einem **Lokalitätsprinzip** (die lokale Kopplung von Ding an Medium – und *nicht* Ding an Ding über weite Entfernungen), der in der Dreifaltigkeit (11.13) seinen Ausdruck findet, hat alle Revolutionen des 20. Jahrhunderts bis hin zum Jahr 2016 unbeschadet überlebt ...

11.2 Quantisierung des freien Strahlungsfeldes

Das “kanonische Programm” sieht sich mit dem Problem konfrontiert, dass L_{rad} unabhängig von der verallgemeinerten Geschwindigkeit A^0 , daher der zu A^0 kanonisch

konjugierten Impuls gleich Null, $\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0$. Daher ist $A^0 = \Phi/c$ kein dynamischer Freiheitsgrad, sondern vielmehr durch Materiekonfiguration (Ladungsdichte Stromdichte) bereits bestimmt. Verbleibt als Freiheitsgrad ein Vektorfeld \vec{A} , allerdings masselos wegen Eichinvarianz. Eichfreiheit betrifft die longitudinale Komponente von \vec{A} (Fourierdenke: $\vec{\nabla} \chi$ ist $\propto \vec{k}$, daher longitudinales Vektorfeld, d.h. Vektorfeld in Propagations-Richtung). Verbleiben als dynamische Freiheitsgrade nur zwei transversale Komponenten bzw. Helizitäten.

Im Schema *Elektrodynamik in Coulombbeziehung* werden die nicht-dynamischen Freiheitsgrade aus der Lagrangedichte eliminiert indem man einerseits die **Coulombbeziehung** wählt, $\text{div} \vec{A} = 0$, und andererseits das skalare Potential A^0 als Funktional der Ladungsdichte ausdrückt. Die sich dann ergebende Lagrangedichte ist frei von Pathologien und kann nach dem kanonischen Schema quantisiert werden. Das Verfahren ist insbesondere in "labornahen" Anwendungen beliebt, kommt aber für grundsätzliche Überlegungen etwas unbeholden daher, da die Coulombbeziehung nicht Lorentzinvariant.

Im Schema *Elektrodynamik in Lorenzbeziehung* wird das klassische 4er Potential A^μ durch die **Lorenzbeziehung**³

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (11.14)$$

eingeschränkt. Als residuale Eichfreiheit verbleibt dann $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$, wobei χ der Wellengleichung $\square \chi = 0$ zu genügen hat. Statt der Standard-Lagrangedichte (11.7) darf die **Fermi-Lagrangedichte**

$$\mathcal{L}_{\text{rad}}^{\text{F}} = -\epsilon_0 \frac{c^2}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) \quad (11.15)$$

³Ludvig Lorenz, nicht Hendrik Antoon Lorentz!

dienen.⁴ Euler-Lagrange-Gleichungen zu () lauten schlicht

$$\square A^\mu = 0, \quad (11.16)$$

wie für homogene Maxwell in Lorenzzeichnung nicht anders zu erwarten.

Da $\mathcal{L}_{\text{rad}}^{\text{F}}$ nun vom Typ “masselose Klein-Gordontheorie” steht dem kanonischen Programm nichts mehr im Wege, unter Eingeweihten genannt **Gupta-Bleuler**-Quantisierung.

Die zu A^μ kanonisch konjugierten Impulsfelder $\pi^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{rad}}^{\text{F}}}{\delta \dot{A}^\mu}$ ergeben sich zu $\pi^0 = -\epsilon_0 \dot{A}^0$, $\pi^i = \epsilon_0 \dot{A}^i$, $i = 1, 2, 3$. Die Poissonklammern sind schnell notiert, Quantisierung folgt auf dem Fuße

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{x}', t) \right] = -i \frac{\hbar}{\epsilon_0} \eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (11.17)$$

alle anderen Kommutatoren gleich Null. Man beachte, dass mit der hier gewählten Konvention der Minkowskimetrik $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ die Kommutatoren der räumlichen Komponenten \hat{A}^i , $i = 1, 2, 3$ durchaus mit dem vertrauten Vorzeichen auf der rechten Seite versehen sind; lediglich der Kommutator der zeitliche Komponente \hat{A}^0 kommt wegen $\pi^0 \propto -\dot{A}^0$ mit einem ungewöhnlichen Minus (so als ob Impuls und Geschwindigkeit wegen “negativer Masse” in entgegengesetzten Richtungen weisen).

Auf den gewohnten Pfaden werden Lösungen der freien Theorie (11.16) nach ebenen Wellen entwickelt,

$$\hat{A}^\mu(x) = \hat{A}^{\mu+}(x) + \hat{A}^{\mu-}(x) \quad (11.18)$$

⁴Standard und Fermi unterscheiden sich: $\mathcal{L}_{\text{rad}}^{\text{F}} = \mathcal{L}_{\text{rad}} - \epsilon_0 \frac{c^2}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \epsilon_0 \frac{c^2}{2} \partial_\mu (A^\mu \partial_\nu A^\nu - A^\nu \partial_\nu A^\mu)$. Die 4er Divergenz ist dynamisch irrelevant, der Zusatzterm $(\partial_\mu A^\mu)^2$ wird in Lorenzzeichnung auf den Wert Null verpflichtet.

mit

$$\hat{A}^{\mu+}(x) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega(\vec{k})}} \epsilon_{\alpha}^{\mu}(\vec{k}) \hat{a}_{\alpha}(\vec{k}) e^{-ikx}, \quad (11.19)$$

und $\hat{A}^{\mu-} = (\hat{A}^{\mu+})^{\dagger}$, denn A reell. Hier steht kx kurz für $k_{\mu}x^{\mu}$ und die \vec{k} -Summe erstreckt sich hier über alle, mit den periodischen Randbedingungen verträglichen, Wellenvektoren \vec{k} und $k^0 = \frac{1}{c}\omega(\vec{k}) = |\vec{k}|$. Die Normierungskonstante wurde im voraussehlenden Gehorsam so gewählt, dass die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^{\dagger} die vertrauten Bedeutung von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aufweisen – vgl. Gl. (11.23) weiter unten.

Die ϵ_{α} , $\alpha = 0, 1, 2, 3$ sind 4 Basisvektoren im Minkowskiraum. Mit der Kurzschreibweise $A \cdot B = A_{\mu}B^{\mu}$ für das (indefinite) Skalarprodukt im Minkowskiraum, wählen wir sie reell und im folgenden Sinne “orthonormal” und vollständig,

$$\epsilon_{\alpha}(\vec{k}) \cdot \epsilon_{\beta}(\vec{k}) = -\eta_{\alpha\beta}, \quad \epsilon_0^{\mu}(\vec{k}) \epsilon_0^{\nu}(\vec{k}) - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^{\mu}(\vec{k}) \epsilon_i^{\nu}(\vec{k}) = \eta^{\mu\nu}. \quad (11.20)$$

Das merkwürdige Minuszeichen in der ersten Gleichung ist Konvention; mir ihm erhalten raumartige Polarisationsvektoren die vertraute Euklidische Bedeutung.⁵ Um etwas vor Augen zu haben

$$\epsilon_0(\vec{k}) = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon_i(\vec{k}) = (0, \vec{\epsilon}_i(\vec{k})), \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.21)$$

wo $\vec{\epsilon}_i$ paarweise orthogonal mit

$$\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = \vec{\epsilon}_3(\vec{k}) \equiv \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (11.22)$$

⁵Noch ein Grund, sich der ART-Konvention $\eta^{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ anzuschließen ...

Anregungen des Strahlungsfeldes mit Polarisation $\vec{\epsilon}_{1,2}$ definieren **transversale** Photonen, Anregungen mit Polarisation $\vec{\epsilon}_0$ die sog. **skalaren** Photonen, Anregungen mit Polarisation $\vec{\epsilon}_3$ die sog. **longitudinale** Photonen. Longitudinale (und skalare) Photonen sind der Laborphysik fremd. Als “freie” Teilchen treten sie auch nie in Erscheinung . . .

Die Poissonklammern implizieren Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_\alpha(\vec{k}), \hat{a}_\beta^\dagger(\vec{k}') \right] = -\eta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad \left[\hat{a}_\alpha(\vec{k}), \hat{a}_\beta(\vec{k}') \right] = \left[\hat{a}_\alpha^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_\beta^\dagger(\vec{k}') \right] = 0. \quad (11.23)$$

Mit Blick auf die Signatur $(\eta_{\alpha\beta}) = (+1, -1, -1, -1)$ sind das für $\alpha = 1, 2, 3$ die Standard Bose Vertauschungsrelationen. Sorgen machen die Vertauschungsrelationen für die skalaren Photonen. Beispielsweise hätte der “ein-Skalarphoton-Zustand” $|1_0(\vec{k})\rangle = \hat{a}_0^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ angesichts $\langle 1_0(\vec{k})|1_0(\vec{k})\rangle = -1$ eine “negative Norm” – in einem gewöhnlichen Hilbertraum ein Ding der Unmöglichkeit. Glücklicherweise werden derartige Zustände in physikalischen Prozessen nicht erzeugt. Physikalische Zustände lassen sich vielmehr charakterisieren $\langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \Psi \rangle = 0$, äquivalent

$$\left[\hat{a}_3(\vec{k}) - \hat{a}_0(\vec{k}) \right] | \Psi \rangle = 0, \quad (11.24)$$

d.h. in physikalischen Prozessen halten sich skalare und longitudinale Photonen die Waage. Insbesondere ist insbesondere der Hamiltonoperator der Theorie

$$\hat{H}_{\text{rad}}^{\text{F}} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) \left(\hat{a}_1^\dagger(\vec{k})\hat{a}_1(\vec{k}) + \hat{a}_2^\dagger(\vec{k})\hat{a}_2(\vec{k}) \right) - \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) \left(\hat{a}_0^\dagger(\vec{k})\hat{a}_0(\vec{k}) - \hat{a}_3^\dagger(\vec{k})\hat{a}_3(\vec{k}) \right) \quad (11.25)$$

im Raum der physikalischen Zustände positiv-definit. Die Energie wird ausschließlich durch die transversalen Photonen bestimmt.

11.3 QED

Die vollständige Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik besteht aus der bereits bekannten Dreifaltigkeit “rad + mat + int”. Mit einer Sorte Diraceteilchen als Repräsentanten der Materie

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + c\bar{\Psi} [i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc] \Psi \quad (11.26)$$

wo

$$j^\mu = qc\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (11.27)$$

die elektrische 4er Stromdichte des Diracfeldes. Die elektrische Ladungskonstante q ist charakteristisch für die Sorte Diraceteilchen. Für Elektron, Myon und Tau $q = -|e_0|$, für Neutrinos $q = 0$, für up-, charm- und top-Quarks $q = 2|e_0|/3$, während für down-, strange- und bottom-Quarks $q = -|e_0|/3$.

Euler-Lagrange-Gleichungen sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (11.1), in Lorenzzeichnung

$$\square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu, \quad (11.28)$$

und die Diracgleichung

$$[i\hbar c\gamma^\mu D_\mu - mc^2] \Psi = 0, \quad (11.29)$$

mit D_μ die vertraute kovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar} A_\mu. \quad (11.30)$$

Bekanntlich ist das elektromagnetische Feld invariant unter Eichtransformationen des 4er Potentials (11.9). Ergänzt um eine lokale Phasentransformation

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-i\frac{q}{\hbar}\chi(x)}\Psi(x) \quad (11.31)$$

erweist sich \mathcal{L}_{QED} als invariant unter der Kombination (11.9,11.31).

Die so eingeführten Transformationen bilden eine Gruppe – die **Eichgruppe** der elektromagnetischen Wechselwirkung. Weil der 4er Gradient (11.9) linear, ist die Gruppe Abelsch. Und weil sie für Diracspinoren die Multiplikation mit einem komplexen Phasenfaktor bedeutet, und Multiplikation mit komplexen Phasenfaktoren die Gruppenverknüpfung der $U(1)$, sagt man, die Eichgruppe der elektromagnetischen Wechselwirkung sei die (lokalisierte) $U(1)$.

11.4 S-Matrix Entwicklung

Der Hamiltonoperator der QED lautet

$$\hat{H}_{\text{QED}} = \hat{H}_{\text{rad}}^{\text{F}} + \hat{H}_{\text{D}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (11.32)$$

wo $\hat{H}_{\text{rad}}^{\text{F}}$ der Hamiltonoperator des Strahlungsfeldes, \hat{H}_{D} der Hamiltonoperator des Diracfeldes, und \hat{H}_{int} der Hamiltonoperator der Wechselwirkung von Strahlungsfeld und Diracfeld.

Da eine exakte Lösung der QED unmöglich erscheint, empfiehlt sich die Analyse im Rahmen einer Störungstheorie, d.h. Entwicklung nach Potenzen in \hat{H}_{int} . Im Wechselwirkungsbild bezüglich $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{rad}}^{\text{F}} + \hat{H}_{\text{D}}$ genügt der Zustandsvektor einer Schrödinger-Gleichung⁶

$$i\hbar|\dot{\psi}_{\text{I}}(t)\rangle = \hat{H}_{\text{I}}(t)|\psi_{\text{I}}(t)\rangle \quad (11.33)$$

wo $\hat{H}_{\text{I}}(t)$ der Operator \hat{H}_{int} im Wechselwirkungsbild,

$$\hat{H}_{\text{I}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_{\text{int}} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}}_{:=\hat{U}_0(t,t_0)} \quad (11.34)$$

⁶Mit $|\psi_{\text{I}}(t)\rangle$ der Zustandsvektor im Wechselwirkungsbild, ist $|\psi(t)\rangle = \hat{U}_0(t,t_0)|\psi_{\text{I}}(t)\rangle$ der Zustandsvektor im Schrödingerbild. Zum Referenzzeitpunkt t_0 ist $|\psi_{\text{I}}(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$.

Der hier eingeführte Operator $\hat{U}_0(t, t_0)$ ist der unitäre Zeitentwicklungsoperator der freien Theorie, $\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0)$, mit t_0 ein Referenzzeitpunkt zu dem sich die Operatoren und Zustände im Wechselwirkungsbild und Schrödingerbild gleichen.

Die Schrödingergleichung (11.33) ist äquivalent einer Integralgleichung

$$|\psi_I(t)\rangle = |i\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_i}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) |\psi_I(t_1)\rangle \quad (11.35)$$

wo $|i\rangle := |\psi_I(t_i)\rangle$ Zustand zum Zeitpunkt t_i . In einem Streuexperiment ist der Anfangszustand $|i\rangle$ durch eine definierte Anzahl freier Quanten (Teilchen, Photonen) mit definierten Impulsen, Ladungen und Spinpolarisationen charakterisiert, die in der fernen Vergangenheit $t_i \rightarrow -\infty$ räumlich so weit getrennt sind, dass sie nicht wechselwirken. Im Lauf der Streuung wechselwirken die einlaufenden Quanten, der Zustand entwickelt sich $|i\rangle \rightarrow |\psi_I(t)\rangle$, um in der fernen Zukunft $t \rightarrow \infty$ als Überlagerung wiederum freier Zustände $|f\rangle$ zu erscheinen. Symbolisch formuliert

$$|\psi_I(-\infty)\rangle = |i\rangle \xleftarrow{t \rightarrow -\infty} |\psi_I(t)\rangle \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} |\psi_I(+\infty)\rangle = \hat{S}|i\rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi} \quad (11.36)$$

mit der sog **S-Matrix** (Acronym für *Streu*matrix) und $S_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle$ die Streampplitude für die Streuung $i \rightarrow f$.

Durch Iteration der Integralgleichung (11.35)

$$|\psi_I(t)\rangle = |i\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_i}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) |i\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_i}^t dt_1 \int_{t_i}^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) |\psi_I(t_2)\rangle \quad (11.37)$$

usw. und mit $t_i \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, lässt sich hier die Reihendarstellung der S-Matrix

leicht angeben,

$$\begin{aligned}
 \hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_1(t_1) \hat{H}_1(t_2) \cdots \hat{H}_1(t_n) \quad (11.38) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \mathbb{T} \left\{ \hat{H}_1(t_1) \hat{H}_1(t_2) \cdots \hat{H}_1(t_n) \right\} \\
 &\equiv \mathbb{T} \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_1(t) dt \right] \right\} \quad (11.39)
 \end{aligned}$$

mit der **Zeitordnungsvorschrift** \mathbb{T} "je später, desto linker".

Erinnert man sich an dieser Stelle

$$\hat{H}_1(t) = \int \underbrace{qc : \hat{\Psi}(x) \gamma_{\mu} \hat{\Psi}(x) \hat{A}^{\mu}(x) :}_{:=\mathcal{H}_1(x)} d^3x. \quad (11.40)$$

mit $x = (ct, \vec{x})$ und \dots : die Normalordnungsvorschrift, lässt sich die Reihe (11.35) wunderschön 4er-mäßig schreiben (es ist $d^4x = c dt dx^3$),

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^n \iint \cdots \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \mathbb{T} \{ \mathcal{H}_1(x_1) \mathcal{H}_1(x_2) \cdots \mathcal{H}_1(x_n) \}. \quad (11.41)$$

Die in (11.40) eingeführte Energiedichte $\mathcal{H}_1(x)$ definiert die elementaren Prozesse der Theorie. Aufgeschlüsselt nach positiven und negativen Frequenzanteilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{H}_1 & = & qc : (\bar{\Psi}^{(+)} + \bar{\Psi}^{(-)}) & \gamma_{\mu} (A^{\mu(+)} + A^{\mu(-)}) & (\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)}) : & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & & \text{vern } e^+ & \text{erz } e^- & \text{vern } \gamma & \text{erz } \gamma & \text{vern } e^- & \text{erz } e^+
 \end{array} \quad (11.42)$$

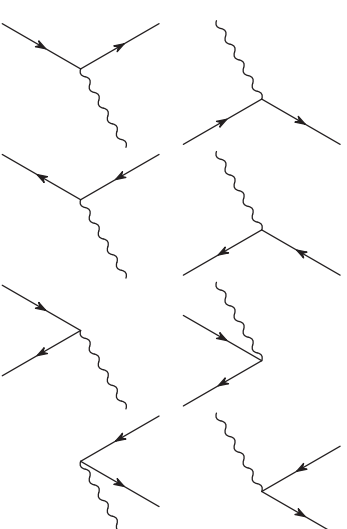


Abb 11.1 Elementarprozesse.

unter Beachtung der Normalordnungsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I/(qc) = & \bar{\Psi}^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(+)}A^{\mu(+)} + \bar{\Psi}^{(-)}\gamma_\mu\Psi^{(+)}A^{\mu(+)} + \bar{\Psi}^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(-)}A^{\mu(+)} + \bar{\Psi}^{(-)}\gamma_\mu\Psi^{(-)}A^{\mu(+)} \\ & + A^{\mu(-)}\bar{\Psi}^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(+)} + A^{\mu(-)}\bar{\Psi}^{(-)}\gamma_\mu\Psi^{(+)} + A^{\mu(-)}\bar{\Psi}^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(-)} + A^{\mu(-)}\bar{\Psi}^{(-)}\gamma_\mu\Psi^{(-)} \end{aligned} \quad (11.43)$$

In der Bildersprache der Feynman-Diagramme ordnet man den acht verschiedenen Termen jeweils einen **Vertex** mit Raum-Zeit-Koordinaten $x = (ct, \vec{x})$ zu, wobei die in () aufgeführten elementaren Umwandlungsprozesse mittels angehängter Linien dargestellt werden. Vernichtung eines Quants wird durch eine Linie der t -Vergangenheit dargestellt, die bei x endet, Erzeugung eines Quants wird durch eine Linie der t -Zukunft dargestellt, die bei x ihren Anfang nimmt. Photonlinien sind gewellt, Diraclinien gerade. Teilchenlinien werden von Antiteilchenlinien durch einen Pfeil unterschieden: konventionell zeigt bei einem Antiteilchen (Positron) der Pfeil in die Vergangenheit, bei einem Teilchen (Elektron) zeigt der Pfeil in die Zukunft.

Die n te Ordnung $\hat{S}^{(n)}$ ist eine Summe von von 8^n verschiedenen Produkten. Für gegebene i und f tragen allerdings nur diejenige Produkte zur Übergangsamplitude S_{fi} bei, bei denen die in i einlaufenden Quanten von einer genau entsprechenden Art und Anzahl von Vernichtungsoperatoren vernichtet werden, und die in f auslaufenden Quanten von einer genau entsprechenden Art und Anzahl von Erzeugungsoperatoren erzeugt werden. Zwischen Ein- und Auslauf können zusätzliche Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren involviert sein, bei denen Teilchen zwar zunächst erzeugt, anschließend aber wieder vernichtet werden. Solche Teilchen sind nur zwischenzeitlich vorhanden, und heißen daher **virtuelle** Teilchen.

Man erspart sich also unnötige Arbeit, indem die Vernichtungsoperatoren in $\hat{S}^{(n)}$ unter Verwendung der Kommutatoren so lange nach rechts durchgetauscht werden bis sie alle rechts von den Erzeugungsoperatoren angeordnet sind. Im Resultat erscheint $\hat{S}^{(n)}$ als eine Summe von Normalprodukten der Form $M^{(n)}F_1^{(-)}F_2^{(-)}\dots F_k^{(-)}F_{k+1}^{(+)}F_{k+2}^{(+)}\dots F_{k+l}^{(+)}$

wo $F_i^{(+)}$ irgendein Vernichtungsoperator, $F_i^{(-)} \in \{\hat{a}, \hat{b}, \hat{d}\}$ und $\hat{F}_i^{(-)}$ irgendein Erzeugungoperator, und $M^{(n)}$ eine Funktion der involvierten 4er Impulse k_i bzw p_i , $i = 1, 2, \dots, k+l$. Jedes solches Normalprodukt beschreibt dann genau einen Prozess, wobei virtuelle Teilchen explizit gar nicht mehr in Erscheinung treten, ihr Effekte stattdessen in der c-Zahl Funktion $M^{(n)}$ subsumiert sind.

11.5 Wick'sches Theorem

In einem zeit-geordneten Operatorprodukt stehen Operatoren mit wachsenden Zeitargumenten von rechts nach links angeordnet. Im Falle zweier Operatoren \hat{O} und \hat{P} beispielsweise

$$T\{\hat{O}(x_1)\hat{P}(x_2)\} := \begin{cases} \hat{O}(x_1)\hat{P}(x_2) & \text{falls } t_1 > t_2 \\ \pm\hat{P}(x_2)\hat{O}(x_1) & \text{falls } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (11.44)$$

wobei das untere Vorzeichen wenn das Produkt aus der Zahl der fermionischen Felder in \hat{O} und der Zahl der fermionischen Felder in \hat{P} ungerade, und oberes Vorzeichen + in allen anderen Fällen.

In einem normal-geordneten Operatorprodukt stehen alle Erzeuger links von den Vernichtern. Im speziellen Fall zweier Feldoperatoren $\hat{A} \equiv \hat{A}(x_1)$ bzw. $\hat{B} \equiv \hat{B}(x_2)$ gilt nun

$$\hat{A}\hat{B} =: \hat{A}\hat{B} : + \langle 0|\hat{A}\hat{B}|0\rangle. \quad (11.45)$$

und somit im Falle $x_1^0 \neq x_2^0$

$$T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\} =: \hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2) : + \langle 0|T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\}|0\rangle \quad (11.46)$$

(Beweis: Übungen). Eingebürgert hat sich hier die Notation

$$\underbrace{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)} := \langle 0|T\{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)\}|0\rangle \quad (11.47)$$

genannt die **Kontraktion** von $\hat{A}(x_1)$ und $\hat{B}(x_2)$. So eine Kontraktion ist eine c -Zahl.

Im **Wick'schen Theorem** wird () für mehrere Operatoren verallgemeinert. Mit der Definition des **verallgemeinerten Normalprodukts**

$$:\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\dots\hat{J}\hat{K}\hat{L}\hat{M}\dots:=(-1)^P\underbrace{\hat{A}\hat{K}\hat{B}\hat{C}\hat{E}\hat{L}}_{\square}:\hat{D}\hat{F}\dots\hat{J}\hat{M}\dots: \quad (11.48)$$

wobei P die Zahl der Permutation benachbarter Fermionenoperatoren, die $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots$ in die Reihenfolge $\hat{A}\hat{K}\hat{B}\dots$ bringen, besagt das **erste Wick'sche Theorem**

$$\begin{aligned} T\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\dots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}\} &= :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\dots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}: \\ &+ :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Y}\hat{Z}: + :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Y}\hat{Z}: + \dots + :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Y}\hat{Z}: \\ &+ :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\dots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}: + \dots + :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\dots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}: \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (11.49)$$

also Summe aller verallgemeinerter Normalprodukte mit allen möglichen Kontraktionen.

Das zweite Wick'sche Theorem besagt, dass für ein sog **gemischtes T-Produkt**

$$T\{N[\hat{A}\hat{B}\dots]_{x_1}\dots N[\hat{A}\hat{B}\dots]_{x_n}\} = T\{(\hat{A}\hat{B}\dots)_{x_1}\dots(\hat{A}\hat{B}\dots)_{x_n}\}_{\text{nichtGleichzeit}} \quad (11.50)$$

11.6 Feynman-Diagramme der QED

$$\hat{A}\hat{B} =: \hat{A}\hat{B} : + \begin{cases} \{\hat{A}^{(+)}, \hat{B}^{(-)}\} & \text{für fermionische } \hat{A}, \hat{B} \\ [\hat{A}^{(+)}, \hat{B}^{(-)}] & \text{sonst} \end{cases} \quad (11.51)$$

und da – mit Blick auf die Modenentwicklung $()$ bzw. $()$ – die Kommutatoren bzw. Anti-Kommutatoren c -Zahlen,

Ruft man sich die Entwicklung nach ebenen Wellen in Erinnerung, stellt man unschwer fest, dass Dank der räumlichen Integration d^3x von \mathcal{F}_{int} nur solche Elementarprozesse zu $\hat{H}_1(t)$ beitragen, bei denen die Summe der einlaufenden Impulse in einem elementaren Vertex gleich der Summe der auslaufenden Impulse. Was die Energie betrifft, liefert der elementare Vertex keine Einschränkungen sondern nur der Energieinhalt des Anfangszustands $|i\rangle$. Jeder mögliche Endzustand f , der in der Wechselwirkung erreichbar ist, hat zwar notwendigerweise die Energie des Anfangszustand, $E_f = E_i$, aber weder Typ der auslaufenden Quanten noch deren individuellen Beiträge zur Gesamtenergie E_f sind damit eindeutig bestimmt. Der Energieinhalt des Zustandes im Zeitraum nach dem zeitlich ersten Vertex und vor dem zeitlich letzten Vertex kann daher aufgrund **virtueller Quanten** durchaus von der Energie des einlaufenden Zustandes abweichen – nur am Ende, d.h. nach dem letzten Vertex sollte die Gesamtenergie des nunmehr auslaufenden Zustands mit der Gesamtenergie des einlaufenden Zustands übereinstimmen.

[Hier jetzt Wick'sches Theorem, und Berechnung einfacher Prozesse in niedrigster Ordnung Störungstheorie ...]

